МГЗПИ

Н. Я. ВИЛЕНКИН,
М. А. ДОБРОХОТОВА,
А. Н. САФОНОВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Московский государственный заочный
педагогический институт

МГЗПИ

Н. Я. ВИЛЕНКИН,
М. А. ДОБРОХОТОВА,
А. Н. САФОНОВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебное пособие для студентов-заочников IV курса физико-математических факультетов

Рекомендовано Главным управлением высших и средних педагогических учебных заведений Министерства просвещения РСФСР

МОСКВА
«ПРОСВЕЩЕНИЕ»
1984

ББК 22.14
В44

Рецензенты:
кафедра математического анализа Тамбовского пединститута
(зав. кафедрой, канд. физ.-мат. наук *Л. М. Молчанова*),
доктор физ.-мат. наук, профессор *М. И. Граев*
(Институт прикладной математики АН СССР)

Редактор МГЗПИ *Е. И. Смольникова*

Виленкин Н. Я. и др.
В44 Дифференциальные уравнения: Учеб. пособие для студентов-заочников IV курса физ.-мат. фак. / Н. Я. Виленкин, М. А. Доброхотова, А. Н. Сафонов.— М.: Просвещение, 1984. — 176 с. — В надзаг.: Моск. гос. заоч. пед. ин-т.

Основное внимание в пособии уделяется развитию у студентов навыков решать физические и геометрические задачи с помощью дифференциальных уравнений. Структура пособия обеспечивает самостоятельную работу студентов по изучению данного курса. Теоретический материал иллюстрируется многочисленными подробно решенными примерами.

В $\frac{4309020400-801}{103(03)-84}$ заказное

ББК.22.14
517.1

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая вниманию читателя книга является учебным пособием для студентов-заочников физико-математических факультетов пединститутов по разделу «Дифференциальные уравнения» курса «Математический анализ». Она входит в серию пособий по математическому анализу, выходящую под общей редакцией профессора Н. Я. Виленкина (в настоящее время в этой серии вышли книги: «Введение в анализ» (1983 г.), «Дифференциальное исчисление» (1984 г.), «Интегральное исчисление» (1979 г.), «Ряды» (1982 г.), «Мощность, метрика, интеграл» (1980 г.), «Элементы функционального анализа в задачах» (1978 г.), и готовится к печати пособие «Теория аналитических функций»). Книга написана в соответствии с действующей программой, причем в конце включен небольшой раздел, посвященный уравнениям в частных производных, который предусматривается проектом новой программы курса математического анализа.

Книга состоит из введения и трех глав. Первая глава посвящена дифференциальным уравнениям первого порядка, решаемым в квадратурах, и методам понижения порядка для дифференциальных уравнений высшего порядка. При этом мы предпочли начать не с общего класса уравнений в полных дифференциалах, а с метода разделения переменных как более наглядного и требующего меньшего числа предварительных сведений.

Одной из важнейших целей раздела «Дифференциальные уравнения» авторы считают обучение студента умению решать физические и геометрические задачи с помощью таких уравнений. Этот вопрос детально рассматривается в первой главе. Общие методы составления дифференциальных уравнений иллюстрируются на многих конкретных примерах.

Во второй главе рассматриваются общие вопросы, относящиеся к дифференциальным уравнениям, — вопросы существования и единственности решения, особые точки и решения и т. д. Относительно доказательства теоремы существования и единственности решения дифференциальных уравнений первого порядка читатель отсылается к книге «Математический анализ. Мощность, метрика, интеграл» (Н. Я. Виленкин, М. Б. Балк, В. А. Петров. М., 1980), где оно приведено в общем контексте метода последовательных приближений. Даны формулировки обобщений этой теоремы на системы дифференциальных уравнений первого порядка и на уравнения высшего порядка. Однако соответствующие доказательства не проводятся, поскольку они не содержат новых идей и в то же время затруднительны технически.

Третья глава посвящена линейным дифференциальным уравнениям высшего порядка. В изложении общей теории таких уравнений мы широко используем понятие линейного дифференциального оператора. Это понятие значительно облегчает вывод многих теорем и является одним из важнейших в современной математике, а потому заслуживает особого внимания. При доказательствах теорем мы опираемся на известные студентам сведения из линейной алгебры, что позволяет не формулировать заново соответствующие понятия для частного случая пространства решений. Методы, связанные с дифференциальными операторами, используются и при решении линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Каждый параграф пособия снабжен вопросами для самопроверки и упражнениями. Нумерация теорем, лемм и примеров сплошная на протяжении каждого пункта.

Авторы выражают глубокую благодарность за тщательное рецензирование, способствовавшее улучшению рукописи, профессору М. И. Граеву и кандидату физ.-мат. наук Л. М. Молчановой.

Авторы просят присылать отзывы и замечания по адресу: Москва, 129846, 3-й проезд Марьиной рощи, д. 41, издательство «Просвещение», редакция математики.

ВВЕДЕНИЕ

Многие вопросы физики, химии, экономики, техники и других областей знания сводятся к следующей задаче: *найти функцию f, имея некоторое уравнение, в которое, кроме этой функции и аргументов, от которых она зависит, входят также ее производные до некоторого порядка включительно*. Такие уравнения называют *дифференциальными уравнениями*. Если искомая функция зависит лишь от одного аргумента, уравнение называют *обыкновенным дифференциальным уравнением*. В противном случае его называют *дифференциальным уравнением в частных производных*. Если в уравнение входит производная n-го порядка искомой функции, но не входят производные более высоких порядков, говорят, что *порядок* этого уравнения равен n.

Пример 1. Уравнение

$$y''' = (x^2 + 1)\, y'$$

является обыкновенным дифференциальным уравнением третьего порядка, а

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

— дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка.

Любую функцию, при подстановке которой в уравнение получается тождество, называют *решением* этого уравнения.

Пример 2. Покажем, что функция $y = 3\cos \omega x - \sin \omega x$ является решением дифференциального уравнения $y'' + \omega^2 y = 0$.

Решение. Найдем вторую производную данной функции, после чего подставим эту производную и саму функцию в уравнение:

$$y' = -3\omega \sin \omega x - \omega \cos \omega x,$$

$$y'' = -3\omega^2 \cos \omega x + \omega^2 \sin \omega x,$$

и потому

$$y'' + \omega^2 y = (-3\omega^2 \cos \omega x + \omega^2 \sin \omega x) + \\ + \omega^2 (3 \cos \omega x - \sin \omega x).$$

Выполняя упрощения, получаем, что при всех значениях x выполняется тождество $y'' + \omega^2 y = 0$, а это и значит, что данная функция является решением заданного уравнения.

Эта функция не является единственным решением данного уравнения, так как ему удовлетворяет любая функция вида $C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$, где C_1 и C_2 — какие-то числа. Эти числа называют *произвольными постоянными*. Видим, что решение уравнения второго порядка $y'' + \omega^2 y = 0$ содержит две произвольные постоянные. Таким образом, это уравнение имеет бесконечно много решений.

Причина появления бесконечного множества решений видна на примере простейшего дифференциального уравнения вида $y' = f(x)$.

Здесь требуется найти функцию по заданному значению ее производной, а из курса интегрального исчисления мы знаем, что эта задача решается интегрированием:

$$y = \int f(x)\, dx.$$

Если F — одна из первообразных функций f, то $\int f(x)\, dx = F(x) + C$ и потому ответ имеет вид: $y = F(x) + C$, где C — произвольная постоянная.

Пример 3. Решим дифференциальное уравнение $y' = e^{3x}$.

Решение. Имеем:

$$y = \int e^{3x}\, dx = \frac{e^{3x}}{3} + C.$$

К уравнениям рассмотренного вида сводятся дифференциальные уравнения n-го порядка вида $y^{(n)} = f(x)$. Решение таких уравнений выполняется путем n-кратного интегрирования функции f. Поскольку при каждом интегрировании появляется произвольная постоянная, то решение зависит уже от n таких постоянных.

П р и м е р 4. Найдем общий вид решений дифференциального уравнения

$$y''' = x^3 + 4.$$

Р е ш е н и е. Так как $y''' = (y'')'$, то для отыскания y'' надо проинтегрировать функцию $x^3 + 4$:

$$y'' = \int (x^3 + 4)\, dx = \frac{x^4}{4} + 4x + C_1.$$

Далее для отыскания y' проинтегрируем полученное выражение для y'':

$$y' = \int \left(\frac{x^4}{4} + 4x + C_1\right) dx = \frac{x^5}{20} + 2x^2 + C_1x + C_2$$

и, наконец, для отыскания y проинтегрируем y':

$$y = \frac{x^6}{120} + \frac{2x^3}{3} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3.$$

Получили выражение, содержащее три произвольные постоянные, т. е. столько, каков порядок уравнения. Вообще, *при решении обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка получается решение, содержащее n произвольных постоянных*. Решение дифференциального уравнения n-го порядка, зависящее от n произвольных постоянных, естественно назвать *общим решением* этого уравнения. Решение же, получаемое из общего решения подстановкой вместо произвольных постоянных определенных чисел, называют *частным решением* данного уравнения.

Однако в таком виде определение общего решения недостаточно строго, так как произвольные постоянные могут входить в решение «кажущимся» образом. Например, функция

$$y = (\sin^2 C_1 + \cos^2 C_1)\, e^x + \frac{C_2^2 + 2C_2 + 1}{(C_2 + 1)^2} \cos x$$

на первый взгляд зависит от двух произвольных постоянных C_1 и C_2. Но если вспомнить, что $\sin^2 C_1 + \cos^2 C_2 = 1$, а $(C_2 + 1)^2 = C_2^2 + 2C_2 + 1$, то увидим, что эта функция равна $e^x + \cos x$, т. е. не зависит ни от C_1, ни от C_2.

Чтобы уточнить определение общего решения дифференциального уравнения, рассмотрим пример.

Пример 5. Материальная точка массой m движется прямолинейно под действием силы F, периодически изменяющейся по закону: $F = \sin 3t$. Найдем закон движения этой точки.

Решение. Направим ось Ox в направлении движения точки. По второму закону Ньютона имеем: $ma = F$ и потому $ma = \sin 3t$. Но ускорение является второй производной от координаты x точки по времени, т. е. $a = x''$, следовательно, имеем:

$$mx'' = \sin 3t.$$

Это уравнение решается указанным выше способом: дважды интегрируя, получим сначала, что

$$x' = -\frac{\cos 3t}{3m} + C_1, \tag{1}$$

а затем

$$x = -\frac{\sin 3t}{9m} + C_1 t + C_2. \tag{2}$$

В полученный ответ входят две произвольные постоянные C_1 и C_2. Это означает, что закон движения точки не определяется однозначно действующей на нее силой. Из физических соображений ясно, что надо еще задать начальную скорость v_0 и начальное положение точки x_0, т. е. задать значения v и x при $t = 0$. Поскольку $v = x'$, то из (1) и (2) получаем равенства:

$$v_0 = -\frac{1}{3m} + C_1, \quad x_0 = C_2.$$

Из них следует, что $C_1 = v_0 + \frac{1}{3m}$, $C_2 = x_0$, и потому решение уравнения (2) примет вид:

$$x = \frac{-\sin 3t}{9m} + \left(v_0 + \frac{1}{3m}\right) t + x_0.$$

Мы видим, что для получения частного решения дифференциального уравнения второго порядка из его общего решения надо дополнительно задать значения искомой функции и ее производной в некоторой точке (например, при $t = 0$).

Замечание. Обращаем внимание на то, что число дополнительных условий равно числу искомых произвольных постоянных. В случае уравнения n-го порядка надо задать значения искомой функции и ее последовательных (n — 1) производных в некоторой точке x_0 для y, y', ..., $y^{(n-1)}$:

$$y\ (x_0) = a_0,\ y'\ (x_0) = a_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}\ (x_0) = a_{n-1}. \qquad (3)$$

Равенства (3) называют *начальными условиями* или *условиями Коши* для обыкновенного дифференциального уравнения порядка n.

Теперь можно уточнить понятие общего решения.

Общим решением дифференциального уравнения n-го порядка называют его решение, зависящее от n произвольных постоянных таким образом, что для любых чисел a_0, a_1, ..., a_{n-1} можно найти значения C_1, ..., C_n — постоянных, при которых решение удовлетворяет начальным условиям (3).

Однако и это определение не является вполне точным, так как, во-первых, начальные условия могут быть такими, которым нельзя удовлетворить (например, условие $y\ (0) = 0$ для дифференциального уравнения $xy + y' = 0$), во-вторых, начальным условиям может удовлетворять бесконечно много решений данного уравнения. Однако такие начальные условия являются исключительными, а для обыкновенных начальных условий все обстоит благополучно. Поэтому в данное выше определение надо перед словами «начальным условиям» добавить слово «обыкновенным». В главе II определение понятия общего решения дифференциального уравнения сформулируем точнее. В главе I будем пользоваться приведенным выше определением, которое математики XVIII века считали достаточным. Некоторым оправданием такой нестрогости может послужить то, что им удавалось, пользуясь указанным выше «наивным» определением, успешно справляться с весьма сложными задачами физики и астрономии.

В первый период развития теории дифференциальных уравнений рассматривали лишь такие их решения, которые можно выразить через элементарные функции. Вскоре, однако, выяснилось, что в таком виде нельзя выразить решение даже таких простейших дифференциальных уравнений, как $y' = \frac{\sin x}{x}$ или $y' = e^{-x^2}$, — соответствующие интегралы не выражаются через элементарные функции. Поэтому рассматривали лишь решения, которые выражались через интегралы от элементарных функций. Поскольку операцию интегрирования в то время связывали в основном с отысканием площадей, или, как говорили, с квадратурами, то уравнения, решения которых выражались через интегралы от элементарных функций, называли *разрешимыми в квадратурах*.

Во многих случаях для дифференциального уравнения удается получить лишь неявное выражение решения, т. е. некоторое соотношение, связывающее функцию и аргумент и обладающее следующим свойством: любая дифференцируемая. функция, получаемая при разрешении этого соотношения относительно переменной y (обозначения функции), удовлетворяет данному дифференциальному уравнению.

Такие неявно заданные решения называют *интегралами* данного дифференциального уравнения. Если при этом интеграл уравнения содержит столько произвольных постоянных, каков порядок уравнения, и путем подбора произвольных постоянных можно удовлетворить любым (обыкновенным) начальным условиям, то такое решение называют *общим интегралом* уравнения. Решение же, получаемое путем придания в общем интеграле произвольным постоянным определенных значений, называют *частным интегралом* данного уравнения. График частного интеграла называют *интегральной кривой* данного уравнения.

Пример 6. Покажем, что равенство

$$(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = R^2 \tag{4}$$

является общим интегралом дифференциального уравнения

$$\frac{(1 + (y')^2)^3}{(y'')^2} = R^2.$$

Решение. Продифференцируем соотношение (4) по x, имея в виду, что y является функцией от x:

$$2(x - C_1) + 2(y - C_2)y' = 0,$$

т. е.

$$x - C_1 + (y - C_2)y' = 0. \tag{5}$$

Дифференцируя еще раз по x, получаем, что

$$1 + (y')^2 + (y - C_2)y'' = 0. \tag{6}$$

Из равенств (4) и (5) следует, что

$$(y - C_2)^2 (1 + (y')^2) = R^2.$$

Подставляя в это равенство вместо $y - C_2$ выражение, полученное из (6), приходим к равенству $\frac{((1+(y')^2)^3}{(y'')^2} = R^2$.

В данном примере можно было легко разрешить равенство (4) относительно y, получив две дифференцируемые функции:

$$y = C_2 \pm \sqrt{R^2 - (x - C_1)^2}.$$

Проверьте, что они удовлетворяют данному дифференциальному уравнению. Но в иных случаях получить такой явный вид не удается.

Ниже мы убедимся, что задачи, приводящие к решению дифференциальных уравнений, равно как и возникающие при решении этих задач уравнения, весьма разнообразны. Однако очень часто совершенно разные на первый взгляд задачи приводят к одинаковым дифференциальным уравнениям. Например, процессы радиоактивного распада, увеличения массы колоний бактерий, поглощения света при прохождении через некоторую среду, движения тела в сопротивляющейся среде и многие другие сводятся к одному и тому же уравнению $y' = ky$, $k \in \boldsymbol{R}$. Оно показывает, что во всех этих вопросах мгновенная скорость изменения некоторой величины пропорциональна значению этой величины в данный момент времени (такие процессы называют *процессами органического изменения*). А дифференциальное уравнение $y' = k(a - y)$ характеризует *процессы выравнивания*, в которых эта мгновенная скорость пропорциональна разности между некоторым предельным значением величины и ее значением в данный момент времени.

Разумеется, чем больше факторов, от которых зависит течение того или иного явления, приходится принимать во внимание, тем сложнее получается уравнение и тем сложнее его решить. В XVIII в. ученые, упрощая задачу, стремились свести ее к дифференциальным уравнениям, решаемым в элементарных функциях или в интегралах от таких функций. Однако потребности практики заставляют строить все более сложные математические модели реальных явлений и решать все более сложные уравнения. Поэтому большое значение приобрели численные методы приближенного решения дифференциальных уравнений. Реализация всех основных достижений современной научно-технической мысли в значительной степени основана на возможности численно решать самые сложные дифференциальные уравнения. Внедрение быстродействующих вычислительных машин, выполняющих миллионы арифметических операций в секунду, позволяет, например, руководить с Земли движением космических кораблей и луноходов, рассчитывать работу атомных реакторов и т. д.

Задачи современной науки сводятся не только к обыкновенным дифференциальным уравнениям, но и к дифференциальным уравнениям в частных производных и к системам таких уравнений. С системами обыкновенных дифференциальных уравнений ученые встретились еще в XVII—XVIII вв., изучая движение планет. Например, если пренебречь взаимным притяжением планет, а учитывать лишь их тяготение к Солнцу, то движение планеты описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x'' = -\dfrac{kx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \\ y'' = -\dfrac{ky}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \\ z'' = -\dfrac{kz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \end{cases}$$

(здесь x, y, z — координаты планеты в момент времени t). *Решением системы дифференциальных уравнений* называют любой набор функций, при подстановке которых в уравнения данной системы все они преобразуются в тождество.

Теория дифференциальных уравнений является одним из важнейших приложений математики. Многие первоклассные результаты в этой области получены русскими и советскими учеными В. С. Владимировым, А. А. Дородницыным, М. В. Келдышем, М. А. Лаврентьевым, О. А. Ладыженской, О. А. Олейник, И. Г. Петровским, Л. С. Понтрягиным, С. Л. Соболевым, В. А. Стекловым, В. В. Степановым, А. Н. Тихоновым, Н. Н. Яненко и другими.

В данной книге рассматриваются обыкновенные дифференциальные уравнения, причем изучаются как методы решения конкретных уравнений, так и вопросы общей теории этих уравнений. Показаны также некоторые методы численного решения уравнений.

Вопросы для самопроверки

1. Какое уравнение называют обыкновенным дифференциальным уравнением?

2. Что называется порядком дифференциального уравнения?

3. Какая функция называется решением дифференциального уравнения?

4. Сколько решений может иметь дифференциальное уравнение?

5. Что называется общим интегралом дифференциального уравнения?

6. Что называется интегральной кривой дифференциального уравнения?

Упражнения

Проверьте, являются ли указанные функции решениями соответствующих дифференциальных уравнений:

1. $y = 5e^{-2x} - 2x + 1$; $\quad y' + 2y = -4x$.

2. $y = \dfrac{1}{x}$; $\quad y'^2 = x^2 + y^2$.

3. $y = \cos 2x$; $\quad y' + 2xy = 0$.

4. $y = \sin 2x$; $\quad y'' + 4y = 0$.

5. $x = 5\sin t,\ y = 2\cos t$*; $\quad y' = -\dfrac{4}{25}\cdot\dfrac{x}{y}$.

6. $x = te^t,\ y = e^{-t}$; $\quad y' = \dfrac{x}{y}$.

7. $y = x\displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t}dt$; $\quad xy' = y + x\sin x$.

8. Напишите два дифференциальных уравнения второго порядка, два — третьего порядка.

9. Проверьте, что нижеуказанные пары функций образуют решение данной системы дифференциальных уравнений:

а) $y = (C_1 + C_2 - C_1x)e^{-2x}$, $z = (C_1x - C_2)e^{-2x}$, $\begin{cases} y' + 3y + z = 0, \\ z' - y + z = 0; \end{cases}$

б) $y = e^{-6t}(C_2\cos t + C_1\sin t)$,
$z = e^{-6t}((C_2 + C_1)\cos t - (C_2 - C_1)\sin t)$,
$\begin{cases} y' + 7y - z = 0, \\ z' + 2y + 5z = 0. \end{cases}$

10. Проверьте, что $y^2 - 1 + 2Cxy = 0$ является интегралом дифференциального уравнения

$$y^2(y - x)y' + y^3 = yx - x^2y',$$

---

* Напомним, что $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

и найдите значение C, при котором это решение удовлетворяет начальному условию $y(1) = 3$.

11. Проверьте, что функция $y = C_1 e^{\sqrt{x}} + C_2 e^{-2\sqrt{x}}$ является решением дифференциального уравнения второго порядка

$$xy'' + \frac{1}{2} y' - y = 0,$$

и найдите значения C_1 и C_2, при которых выполняются условия: $y(1) = 2$, $y'(1) = 0$.

12. При каких значениях ω существует отличное от нуля решение вида

$$y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$$

дифференциального уравнения

$$y'' + \omega^2 y = 0,$$

удовлетворяющее условиям: $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$?

Глава I

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА И ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА УРАВНЕНИЙ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

§ 1. ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ВИДОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Любое дифференциальное уравнение первого порядка равносильно уравнению вида $F(x, y, y') = 0$. Решая это уравнение относительно y', получаем одно или несколько уравнений вида

$$y' = f(x, y). \tag{1}$$

Например, из уравнения $e^{y'} - 1 + xy = 0$ получаем: $y' = \ln(1 - xy)$, а из уравнения $(y')^2 - 1 - y^2 = 0$ получаем: $y' = \pm\sqrt{1 + y^2}$. В этом параграфе мы будем, как правило, рассматривать уравнения, разрешенные относительно производной, т. е. имеющие вид (1).

Умножив обе части уравнения (1) на dx и воспользовавшись равенством $y'dx = dy$, получим уравнение

$$dy = f(x, y)\,dx, \tag{1'}$$

которое называют *дифференциальной формой* уравнения (1). Если $f(x, y) = -\dfrac{M(x, y)}{N(x, y)}$, то можно умножить обе части уравнения на $N(x, y)$ и получить уравнение

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0, \tag{2}$$

где

$$M^2(x, y) + N^2(x, y) \neq 0.$$

В это уравнение переменные x и y входят равноправно, и потому равенство (2) можно считать также дифференциальной формой уравнения $x' = -\dfrac{N(x, y)}{M(x, y)}$, в котором x рассматривается как функция от y.

Во введении говорилось, что самыми простыми дифференциальными уравнениями первого порядка являются уравнения вида $y' = f(x)$, которые решаются интегрированием функции. Следующими по сложности являются дифференциальные уравнения вида

$$q(y)y' = p(x), \tag{3}$$

для которых дифференциальная форма такова:

$$q(y)\,dy = p(x)\,dx. \tag{3'}$$

Поскольку в уравнении (3′) левая часть содержит лишь переменную y и ее дифференциал, а правая — лишь переменную x и ее дифференциал, то говорят, что в этом уравнении переменные x и y *разделены*. Решение уравнений с разделенными переменными основано на следующей теореме:

Теорема. *Если функция p имеет первообразную P, а функция q — первообразную Q, то общий интеграл дифференциального уравнения (3′) имеет вид*:*

$$Q(y) = P(x) + C \tag{4}$$

(C — произвольная постоянная).

Доказательство. По условию имеем равенства $P' = p$ и $Q' = q$. Из первого следует, что $dP(x) = P'(x)\,dx = p(x)\,dx$, а из второго в силу инвариантности формы дифференциала первого порядка, что $dQ(y) = Q'(y)\,dy = q(y)\,dy$. Поэтому уравнение (3′) можно записать следующим образом:

$$dQ(y) = dP(x).$$

Здесь y является функцией от x, и потому слева и справа стоят дифференциалы функций от x. Но такие дифференциалы могут быть равны в том и только в том случае, когда функции $Q(y)$ и $P(x)$ отличаются лишь постоянным слагаемым, т. е. когда $Q(y) = P(x) + C$. Теорема доказана.

Таким образом, если в дифференциальном уравнении переменные разделены, то для его решения достаточно взять интегралы от обеих частей уравнения. Чтобы найти частное решение такого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$, надо вместо неопределен-

* Этот же вид имеет и общее решение уравнения (3).

ных интегралов записать определенные интегралы с переменным верхним пределом:

$$\int_{y_0}^{y} q(y)\,dy = \int_{x_0}^{x} p(x)\,dx. \tag{5}$$

В самом деле, беря дифференциалы обеих частей в (5) и учитывая теорему о производной определенного интеграла по верхнему пределу, получаем уравнение (3′). Начальное же условие выполняется потому, что при $x = x_0$, $y = y_0$ обе части равенства (5) обращаются в нуль.

Пример 1. Найдем общий интеграл уравнения

$$\operatorname{tg} y \cdot y' = \frac{1}{x}.$$

Решение. Запишем это уравнение в дифференциальной форме: $\operatorname{tg} y\,dy = \frac{dx}{x}$. Так как

$$\int \operatorname{tg} y\,dy = -\ln|\cos y|$$

и

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x|,$$

то общий интеграл имеет вид:

$$C - \ln|\cos y| = \ln|x|,$$

где C — произвольная постоянная. Записав C в виде $\ln C_1$, представим общий интеграл следующим образом:

$$\ln C_1 - \ln|\cos y| = \ln|x|,$$

или

$$\frac{C_1}{|\cos y|} = |x|,$$

где $C_1 > 0$. Отсюда следует, что $x\cos y = C_2$, где C_2 — любое действительное число.

К решению уравнений рассмотренного вида (3) сводится интегрирование *дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными*. Так называют уравнение

$$y' = p(x)\,q(y), \tag{6}$$

правая часть которого является произведением функции от x на функцию от y. Если $q(y_1) = 0$, то функция $y = y_1$

является решением уравнения (6), поскольку для нее $y'=0$ и $p(x)\,q(y_1)=0$. В области же, где $q(y)\neq 0$, уравнение (6) равносильно уравнению

$$\frac{y'}{q(y)} = p(x) \tag{7}$$

с разделенными переменными. Поэтому его общий интеграл имеет вид:

$$\int \frac{dy}{q(y)} = \int p(x)\,dx \tag{8}$$

(этот интеграл не содержит решений вида $y=b$, где $q(b)=0$).

Пример 2. Решим уравнение

$$y' = x^2 (y-a)(y-b). \tag{9}$$

Решение. Корнями уравнения $(y-a)(y-b)=0$ являются числа a и b. Поэтому имеем решения данного уравнения

$$y = a \text{ и } y = b.$$

В области, где $y\neq a$, $y\neq b$, данное уравнение равносильно уравнению

$$\frac{dy}{(y-a)(y-b)} = x^2\,dx$$

с разделенными переменными. Так как

$$\int \frac{dy}{(y-a)(y-b)} = \frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{y-a}{y-b}\right| + \ln C, \quad \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C,$$

то общий интеграл уравнения (9) имеет вид:

$$\frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{y-a}{y-b}\right| + \ln C = \frac{x^3}{3}.$$

Из этого равенства следует, что*

$$\frac{C(y-a)}{y-b} = e^{\frac{(a-b)x^3}{3}}$$

* Здесь C^{a-b} заменено на C, так как оба выражения — произвольные постоянные. Кроме того, снятие знака модуля приводит к тому, что рассматриваются любые, а не только положительные значения C.

Предоставляем читателю выразить из этого равенства y через x.

К уравнениям вида (6) сводятся и уравнения вида

$$M(x)\,Q(y)\,y' + P(x)\,N(y) = 0, \tag{10}$$

не разрешенные относительно производной. Решая их относительно y', получаем уравнение

$$y' = -\frac{P(x)}{M(x)} \cdot \frac{N(y)}{Q(y)}, \tag{10'}$$

правая часть которого является произведением функции от x на функцию от y. Дифференциальная форма уравнения (10) такова:

$$P(x)\,N(y)\,dx + M(x)\,Q(y)\,dy = 0. \tag{11}$$

Если a — корень уравнения $M(x) = 0$, то $x = a$ является интегралом этого уравнения (поскольку из $x = a$ следует, что $dx = 0$, причем по условию: $M(a) = 0$). Точно так же, если b — корень уравнения $N(y) = 0$, то $y = b$ — интеграл того же уравнения.

В области, где $M(x) \neq 0$ и $N(y) \neq 0$, переменные разделяются путем деления обеих частей уравнения на $M(x)\,N(y)$. Получаем:

$$\frac{P(x)}{M(x)}\,dx + \frac{Q(y)}{N(y)}\,dy = 0. \tag{11'}$$

А теперь, как говорилось выше, достаточно проинтегрировать обе части получившегося равенства:

$$\int \frac{P(x)}{M(x)}\,dx + \int \frac{Q(y)}{N(y)}\,dy = C. \tag{12}$$

Частное же решение, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$, имеет вид:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{P(x)}{M(x)}\,dx + \int_{y_0}^{y} \frac{Q(y)}{N(y)}\,dy = 0. \tag{12'}$$

П р и м е р 3. Решим уравнение

$$\sqrt{1 - y^2}\,dx + \sqrt{1 - x^2}\,dy = 0.$$

Р е ш е н и е. Это уравнение с разделяющимися переменными, в котором $P(x) = 1$, $N(y) = \sqrt{1 - y^2}$, $Q(y) = 1$, $M(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Пусть $\sqrt{1 - y^2} \neq 0$ и

$\sqrt{1-x^2} \neq 0$. Разделив обе части уравнения на $M(x) \cdot N(y) = \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2}$, получим уравнение с разделенными переменными:

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0.$$

Его общий интеграл найдем по формуле (12):

$$\arcsin x + \arcsin y = C.$$

Так как $M(x) = \sqrt{1-x^2}$ и $N(y) = \sqrt{1-y^2}$ обращаются в нуль соответственно при $x = \pm 1$ и $y = \pm 1$, то уравнение имеет еще четыре решения: $x = 1$, $x = -1$, $y = 1$, $y = -1$, которые не содержатся в общем интеграле.

Пример 4. Решим уравнение

$$y' = \sin(x+y) - \sin(x-y). \tag{13}$$

Решение. На первый взгляд уравнение (13) не относится к классу уравнений с разделяющимися переменными. Однако если воспользоваться равенством

$$\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2\cos x \sin y,$$

то получим уравнение

$$y' = 2\cos x \sin y,$$

в котором переменные легко разделяются:

$$\frac{dy}{\sin y} = 2\cos x\, dx.$$

Интегрируя обе части этого равенства и принимая во внимание, что

$$\int \frac{dy}{\sin y} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{y}{2}\right| + C, \quad \int \cos x\, dx = \sin x + C,$$

получаем общий интеграл

$$\ln\left|\operatorname{tg}\frac{y}{2}\right| = 2\sin x + \ln C.$$

Отсюда находим, что

$$y = 2\operatorname{arctg}(Ce^{2\sin x}) + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Записанное в такой форме решение зависит не только от постоянной C, принимающей действительные значения, но и от целого числа k. Кроме того, имеем решения, получаемые из тригонометрического уравнения $\sin y = 0$, а именно $y = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Некоторые уравнения, не являющиеся уравнениями с разделяющимися переменными, сводятся к этому типу уравнений с помощью введения новой переменной.

П р и м е р 5. Решим уравнение

$$y' = \sin(x + y). \tag{14}$$

Р е ш е н и е. Уравнение (14) не является уравнением с разделяющимися переменными, но оно может быть приведено к таковому введением новой переменной (подстановкой). Положим $x + y = u$, где u — новая функция от x. Очевидно, $1 + y' = u'$ и (14) принимает вид:

$$u' = 1 + \sin u. \tag{15}$$

Здесь уже переменные легко разделяются.

Если $1 + \sin u \neq 0$, то уравнение (15) можно записать в виде

$$\frac{du}{1 + \sin u} = dx.$$

Используя подстановку $\operatorname{tg}\frac{u}{2} = z$, найдем:

$$\int \frac{du}{1 + \sin u} = -\frac{2}{1 + \operatorname{tg}\frac{u}{2}}.$$

Общий интеграл уравнения (15) имеет вид:

$$x + \frac{2}{1 + \operatorname{tg}\frac{u}{2}} = C.$$

После обратной замены u на $x + y$ получаем:

$$x + \frac{2}{1 + \operatorname{tg}\frac{x + y}{2}} = C.$$

Корни уравнения $1 + \sin u = 0$ равны: $u_k = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \ (k \in \mathbf{Z})$. Поэтому функции $u = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \ (k \in \mathbf{Z})$ также являются решениями уравнения (15), а функции

$y = -x - \frac{\pi}{2} + 2\pi k \ (k \in \mathbf{Z})$— решениями уравнения (14). Таким образом, уравнение (14) имеет общий интеграл

$$x + \frac{2}{1 + \operatorname{tg} \frac{x+y}{2}} = C,$$

а также решения

$$y = -x - \frac{\pi}{2} + 2\pi k \ (k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots).$$

2. Линейные уравнения первого порядка. Важным классом уравнений, сводящихся путем подстановки к уравнениям с разделяющимися переменными, являются так называемые линейные уравнения.

Определение. *Линейным уравнением первого порядка* называют дифференциальное уравнение первого порядка, которое линейно относительно функции и ее производной, т. е. уравнение вида

$$A(x)\, y' + B(x)\, y = C(x). \qquad (1)$$

Здесь $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ — непрерывные функции от x. В области, где $A(x) \neq 0$, это уравнение равносильно уравнению вида

$$y' + p(x)\, y = q(x), \qquad (2)$$

в котором для краткости положено

$$p(x) = \frac{B(x)}{A(x)}, \quad q(x) = \frac{C(x)}{A(x)}.$$

Если же $A(x_0) = 0$, то одним из интегралов уравнения (1), записанного в дифференциальной форме, $A(x)\, dy + B(x)\, y dx = C(x)\, dx$ является $x = x_0$. В самом деле, из $x = x_0$ получаем: $dx = 0$, при подстановке x_0 вместо x и нуля вместо dx получаем верное равенство $A(x_0)\, dy = 0$.

Пример 1. Для уравнения

$$x(x-1)\, y' + y \sin x = \operatorname{tg} x$$

$x = 0$ и $x = 1$ являются решениями. Способ отыскания иных решений для линейных уравнений будет изложен ниже.

Проще всего решается линейное дифференциальное уравнение в случае, когда его правая часть $q(x)$ равна нулю, т. е. уравнение вида

$$y' + p(x)\,y = 0. \tag{3}$$

Такое уравнение (3) называют *однородным линейным уравнением первого порядка*. Оно является уравнением с разделяющимися переменными. Записывая уравнение (3) в виде $\frac{y'}{y} = -p(x)$ и замечая, что $\frac{y'}{y} = (\ln|y|)'$, получаем уравнение

$$(\ln|y|)' = -p(x).$$

Из него следует, что

$$\ln|y| = -\int p(x)\,dx = -P(x) + \ln C,$$

где P — первообразная для функции p. Поэтому*

$$y = Ce^{-P(x)} \tag{4}$$

является общим решением уравнения (3).

Пример 2. Решим уравнение

$$y' = y\cos x. \tag{5}$$

Решение. Разделяя переменные, получаем

$$\frac{y'}{y} = \cos x, \text{ или } \frac{dy}{y} = \cos x\,dx.$$

Значит,

$$\ln|y| = \int \cos x dx = \sin x + \ln C,$$

т. е.

$$y = Ce^{\sin x}$$

является общим решением уравнения (5).

Уравнение (2) в общем случае, т. е. при $q(x) \neq 0$, называют *неоднородным линейным уравнением первого порядка*. Его решение сводится к решению соответствующего ему однородного дифференциального уравнения, т. е. уравнения $y' + p(x)\,y = 0$.

В самом деле, пусть u — решение уравнения

$$y' + p(x)\,y = 0,$$

---

* После потенцирования получаем, что $|y| = Ce^{-Px}$, где $C > 0$. Это равносильно равенству (3).

т. е. пусть имеет место тождество $u' + p(x)u = 0$. Сделаем в уравнении (2) замену переменной $y = uv$. Получим:

$$(uv)' + p(x)uv = q(x),$$

т. е.

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x),$$

или

$$v(u' + p(x)u) + uv' = q(x).$$

Поскольку $u' + p(x)u = 0$, то функция v должна удовлетворять уравнению $uv' = q(x)$, т. е. $v'(x) = \frac{q(x)}{u(x)}$. Отсюда находим, что

$$v = \int \frac{q(x)}{u(x)}\,dx = V + C,$$

где V — первообразная для функции $\frac{q(x)}{u(x)}$. Но тогда общее решение уравнения (2) имеет вид:

$$y = uv = u(V + C). \tag{6}$$

Иными словами, справедлива следующая теорема:

Т е о р е м а. *Общее решение неоднородного линейного уравнения*

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{7}$$

имеет вид:

$$y = u(V + C), \tag{8}$$

где u — какое-нибудь частное решение соответствующего однородного уравнения $y' + p(x)y = 0$, а V — первообразная функция для $\frac{q(x)}{u(x)}$.

Выше мы видели, что одним из решений уравнения (3) является $u = e^{-P(x)}$, где $P(x)$ — одна из первообразных для функции $p(x)$. Поэтому

$$v(x) = \int \frac{q(x)}{e^{-P(x)}}\,dx = \int e^{P(x)} q(x)\,dx,$$

и, следовательно,

$$y = uv = e^{-P(x)} \int e^{P(x)} q(x)\,dx. \tag{9}$$

Мы не рекомендуем, однако, ни решать линейное дифференциальное уравнение (7) по формуле (9), ни даже запоминать равенство (8). Вместо этого лучше использовать следующую схему решения:

а) *Найти какое-нибудь ненулевое частное решение* $u(x)$ *соответствующего однородного линейного уравнения, т. е. уравнения*

$$u' + p(x)u = 0.$$

б) *Сделать в заданном уравнении подстановку* $y = u(x) \cdot v(x)$.

в) *Из получившегося уравнения найти значение* $v'(x)$, *после чего интегрированием найти общее выражение для* $v(x)$.

г) *Записать ответ в виде* $y = v(x) \cdot u(x)$.

Пример 3. Найдем общее решение уравнения

$$y' - 2xy = 2x. \tag{10}$$

Решение. Сначала решаем соответствующее однородное линейное уравнение, т. е. уравнение

$$u' - 2xu = 0. \tag{11}$$

Разделяя переменные, находим, что $\frac{du}{u} = 2xdx$, откуда $\ln|u| = x^2 + C$, и потому $u = e^{x^2}$ (для простоты положено $C = 0$ — ведь нам нужно хотя бы одно решение уравнения (11)).

Подстановка $y = v(x)u$ приводит уравнение (10) к виду

$$v'(x)u + v(x)(u' - 2xu) = 2x,$$

т. е. после упрощения к виду $v'(x)e^{x^2} = 2x$ (напомним, что $u = e^{x^2}$). Отсюда находим, что $v'(x) = 2xe^{-x^2}$ и потому

$$v(x) = 2\int xe^{-x^2}dx = -e^{-x^2} + C.$$

Значит, общее решение уравнения (10) имеет вид:

$$y = v(x)u = (-e^{-x^2} + C)e^{x^2} = -1 + Ce^{x^2}.$$

Метод, использованный нами для решения линейных уравнений, годится и для решения уравнений более общего вида:

$$y' + p(x)y = q(x)y^n. \tag{12}$$

Их называют *уравнениями Бернулли*. Здесь надо сначала найти какое-нибудь ненулевое решение однородного линейного уравнения

$$u' + p(x)u = 0,$$

а потом сделать в (12) подстановку $y = v(x)u(x)$, сводящую его к уравнению относительно $v(x)$ с разделяющимися переменными:

$$v'(x)u(x) = q(x)v^n(x)u^n(x).$$

Пример 4. Решим уравнение

$$xy' + y = y^2 \ln x. \tag{13}$$

Решение. Это уравнение Бернулли. Сначала решим уравнение

$$xu' + u = 0.$$

Разделяя переменные, находим, что

$$\frac{du}{u} = -\frac{dx}{x},$$

откуда получаем: $\ln u = -\ln x$, т. е. $u = \frac{1}{x}$.

Теперь в уравнении (13) делаем подстановку:

$$y = v(x)u = \frac{v(x)}{x}.$$

Имеем:

$$y' = \left(\frac{v(x)}{x}\right)' = \frac{xv'(x) - v(x)}{x^2},$$

и потому (13) примет вид:

$$\frac{xv'(x) - v(x)}{x} + \frac{v(x)}{x} = \frac{v^2(x)\ln x}{x^2}.$$

Отсюда следует, что

$$v'(x) = \frac{v^2(x)\ln x}{x^2}.$$

Вновь разделяя переменные, получаем:

$$\frac{v'(x)}{v^2(x)} = \frac{\ln x}{x^2}$$

и потому

$$\int \frac{dv}{v^2} = \int \frac{\ln x}{x^2} dx.$$

Так как

$$\int \frac{dv}{v^2} = -\frac{1}{v}, \quad \int \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{1+\ln x}{x} + C^*,$$

то

$$\frac{1}{v(x)} = \frac{1+\ln x}{x} + C,$$

откуда

$$v(x) = \frac{x}{\ln x + 1 + Cx}.$$

Значит, общее решение уравнения (13) имеет вид:

$$y = v(x)\,u(x) = \frac{1}{\ln x + 1 + Cx}.$$

3. Однородные уравнения. Рассмотрим еще один класс уравнений, которые путем подстановки сводятся к уравнениям с разделяющимися переменными. Введем следующее определение:

Определение. Функция $f(x, y)$ называется *однородной функцией нулевой степени*, если для любого $\lambda \neq 0$ выполняется равенство

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y). \quad (1)$$

Иными словами, однородная функция нулевой степени не изменяется при умножении x и y на одно и то же отличное от нуля число.

Пример 1. Функции

а) $\dfrac{x^3 + y^3}{3x^3 + 5x^2 y}$; б) $\arcsin \dfrac{x^2 + y^2}{2xy}$

являются однородными нулевой степени, так как при замене x и y на λx и λy, где $\lambda \neq 0$, получаем соответственно:

а) $$\frac{(\lambda x)^3 + (\lambda y)^3}{3(\lambda x)^3 + 5(\lambda x)^2 \lambda y} = \frac{\lambda^3 (x^3 + y^3)}{\lambda^3 (3x^3 + 5x^2 y)} = \frac{x^3 + y^3}{3x^3 + 5x^2 y};$$

---

* См.: Виленкин Н. Я., Куницкая Е. С., Мордкович А. Г. Математический анализ. Интегральное исчисление. — М.: Просвещение, 1979, с. 162, упр. 191.

б) $\arcsin \frac{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2}{2 (\lambda x) (\lambda y)} = \arcsin \frac{\lambda^2 (x^2 + y^2)}{\lambda^2 2xy} = \arcsin \frac{x^2 + y^2}{2xy}$.

Л е м м а. *Если $f(x, y)$ — однородная функция нулевой степени, то $f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, где $\varphi(t) = f(1, t)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полагая в равенстве (1) $\lambda = \frac{1}{x}$, получаем при $x \neq 0$:

$$f(x, y) = f\left(\frac{x}{x}, \frac{y}{x}\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Лемма доказана.

Рассмотрим теперь дифференциальные уравнения $y' = f(x, y)$, правая часть которых является однородной функцией нулевой степени. Такие уравнения называют *однородными*. Например, уравнение

$$y' = \sin \frac{x^3 - y^3}{3x^2y - 3xy^2}$$

однородно, а уравнение

$$y' = x^4 + y^4$$

не является таковым.

В силу леммы однородное уравнение $y' = f(x, y)$ можно представить в виде $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, где $\varphi(t) = f(1, t)$.

Решение же уравнения

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \tag{2}$$

сводится к решению уравнения с разделяющимися переменными. Для этого введем новую искомую функцию, положив $\frac{y}{x} = u$. Тогда $y = xu$, и потому $y' = (xu)' = u + xu'$. Получаем уравнение $u + xu' = \varphi(u)$, т. е.

$$xu' = \varphi(u) - u. \tag{3}$$

Полученное уравнение с разделяющимися переменными имеет решения: $u = u_1, \ldots, u = u_n$, где $u_1, \ldots, u_n$ — корни уравнения $\varphi(u) - u = 0$. Так как $y = ux$, то соответствующие решения данного уравнения $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ имеют вид: $y = u_1x, \ldots, y = u_nx$, $x \neq 0$. Их графики являются проходящими через начало координат прямыми, из которых выброшена сама точка O (0, 0).

В области же, где $\varphi(u) - u \neq 0$, можно разделить переменные:

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, получим:

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x},$$

т. е.

$$\Phi(u) = \ln|x| + C,$$

где $\Phi(u)$ — одна из первообразных функции $\frac{1}{\varphi(u) - u}$. Соответствующее общее решение уравнения (2) имеет вид:

$$\Phi\left(\frac{y}{x}\right) = \ln|x| + C. \tag{4}$$

Замечание. Заменив в решении (4) x на λx и y на λy, получим:

$$\Phi\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right) = \ln(\lambda x) + C = \ln|x| + \ln|\lambda| + C,$$

т. е.

$$\Phi\left(\frac{y}{x}\right) = \ln|x| + C_1, \text{ где } C_1 = |\ln\lambda| + C.$$

Таким образом, замена в решении однородного уравнения x на λx и y на λy приводит к замене этого решения иным решением того же уравнения (соответствующим замене постоянной C на постоянную $\ln|\lambda| + C$). Преобразование $x \to \lambda x$, $y \to \lambda y$ является гомотетией плоскости с центром в начале координат. При этой гомотетии интегральные кривые однородных дифференциальных уравнений переходят одна в другую. Это можно было доказать, не решая данного уравнения. Отыскание преобразований переменных, переводящих одно решение данного дифференциального уравнения в другое решение того же уравнения, служит мощным орудием в отыскании таких решений.

Пример 2. Решим уравнение

$$x^2y' + y^2 + xy + x^2 = 0.$$

Решение. Разрешая это уравнение относительно y', получим: $y' = -\frac{x^2 + y^2 + xy}{x^2}$. Это уравнение однородно, так как его правая часть — однородная функция нулевой степени. Сделаем подстановку: $\frac{y}{x} = u$. Тогда $y = ux$ и $y' = xu' + u$. Подставив эти значения y и y' в заданное уравнение, получим уравнение с разделяющимися переменными: $xu' = -(u+1)^2$. При $u + 1 \neq 0$ имеем: $-\frac{du}{(u+1)^2} = \frac{dx}{x}$, и общий интеграл имеет вид: $\ln|Cx| = \frac{1}{u+1}$. Если $u + 1 = 0$, то получим решение этого уравнения $u = -1$. После замены u на $\frac{y}{x}$ получим для заданного уравнения общее решение $y = \frac{x}{\ln|Cx|} - x$ и еще решение $y = -x$.

4. Уравнения в полных дифференциалах. Полученное в п. 1 решение дифференциальных уравнений вида $p(x)\,dx + q(y)\,dy = 0$ можно описать следующим образом: переписываем это уравнение в виде $d(P(x) + Q(y)) = 0$ (где P — первообразная для p, а Q — для q) и замечаем, что дифференциал функции равен нулю в том и только в том случае, когда эта функция постоянна. Такой метод решения пригоден для гораздо более широкого класса дифференциальных уравнений, а именно для так называемых уравнений в полных дифференциалах.

Определение. Дифференциальное уравнение

$$p(x, y)\,dx + q(x, y)\,dy = 0 \tag{1}$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если существует такая функция двух переменных $U(x, y)$, что

$$dU = p(x, y)\,dx + q(x, y)\,dy. \tag{2}$$

Равенство (2) означает, что $\frac{\partial U}{\partial x} = p(x, y)$ и $\frac{\partial U}{\partial y} = q(x, y)$.

Если (1) является уравнением в полных дифференциалах, то его можно переписать следующим образом: $dU(x, y) = 0$. Этому уравнению удовлетворяют те и только те функции $y = \varphi(x)$, которые удовлетворяют одному из соотношений $U(x, y) = C$, где C — произвольная постоянная. Итак, *если существует такая функция* $U(x, y)$, *что* $\frac{\partial U}{\partial x} = p(x, y)$, $\frac{\partial U}{\partial y} = q(x, y)$, *то общий интеграл дифференциального уравнения* (1) *имеет вид*:

$$U(x, y) = C. \tag{3}$$

Из курса математического анализа известно необходимое и достаточное условие, которому должно удовлетворять выражение

$$p\,(x,\,y)\,dx + q\,(x,\,y)\,dy,$$

для того чтобы оно было полным дифференциалом некоторой функции, заданной в односвязной области Ω. Если в этой области частные производные $\frac{\partial p}{\partial y}$ и $\frac{\partial q}{\partial x}$ непрерывны, то $pdx + qdy$ является полным дифференциалом в том и только в том случае, когда выполняется равенство

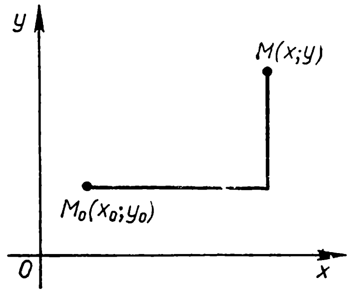

Рис. 1

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}. \tag{4}$$

В этом случае функция $U\,(x,\,y)$, полным дифференциалом которой является $pdx + qdy$, выражается следующим образом:

$$U\,(x,\,y) = \int_{\Gamma} (p\,(x,\,y)\,dx + q\,(x,\,y)\,dy). \tag{5}$$

Здесь Γ — любая кривая в области Ω, соединяющая фиксированную точку $M_0\,(x_0;\,y_0)$ этой области, в которой $p^2\,(x_0,\,y_0) + q^2\,(x_0,\,y_0) \neq 0$, с точкой $M\,(x;\,y)$. В частности, если Γ имеет вид ломаной, изображенной на рисунке 1, то формула (5) принимает вид:

$$U\,(x,\;y) = \int_{x_0}^{x} p\,(x,\;y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} q\,(x,\;y)\,dy. \tag{6}$$

Пример. Решим уравнение

$$(3x^2 + 6xy^2)\,dx + (6x^2y + 4y^3)\,dy = 0.$$

Решение. Здесь $p\,(x,\;y) = 3x^2 + 6xy^2$; $q\,(x,\;y) = 6x^2y + 4y^3$. Выясним, является ли это уравнение уравнением в полных дифференциалах. Найдем: $\frac{\partial q}{\partial x}$ и $\frac{\partial p}{\partial y}$, $\frac{\partial q}{\partial x} = 12xy$, $\frac{\partial p}{\partial y} = 12xy$; условие $\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y}$ выполняется, причем частные производные непрерывны.

Применим формулу (6), положив $x_0 = 1$; $y_0 = 0$. Вычислим интегралы $\int\limits_1^x p(x,\ 0)\,dx$ и $\int\limits_0^y q(x,\ y)\,dy$:

$$\int\limits_1^x p(x,\ 0)\,dx = \int\limits_1^x 3x^2\,dx = x^3 - 1,$$

$$\int\limits_0^y q(x,\ y)\,dy = \int\limits_0^y (6x^2y + 4y^3)\,dy = 3x^2y^2 + y^4.$$

Получим общий интеграл уравнения $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C - 1$.

Замечание. Функция $U(x,\ y)$ оказалась равной $x^3 + 3x^2y^2 + y^4$. Очевидно,

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 3x^2 + 6xy^2 = p(x,\ y);\ \frac{\partial U}{\partial y} = 6x^2y + 4y^3 = q(x,\ y).$$

5. Определение типа дифференциального уравнения. Для выбора пути решения заданного дифференциального уравнения первого порядка сначала надо определить тип, к которому оно относится. Для этого следует разрешить данное уравнение относительно производной, т. е. привести его к виду $y' = f(x, y)$. После этого надо посмотреть, не разлагается ли функция $f(x, y)$ на множители, один из которых зависит только от x, а второй — только от y. Если это возможно, то надо разделить переменные и интегрировать обе части получившегося равенства.

Если переменные не разделяются непосредственно, то следует проверить, является ли данное уравнение линейным или уравнением Бернулли, т. е. имеет ли функция $f(x, y)$ вид $p(x)\,y + q(x)$ или $p(x)\,y + q(x)\,y^n$. В этом случае сначала надо решить соответствующее однородное линейное уравнение $u' = -p(x)\,u$, а потом сделать подстановку $y = vu$.

К линейным уравнениям сводятся также уравнения вида $y' = \dfrac{1}{p(y)\,x + q(y)}$ $\left(\text{и более общего вида } y' = \dfrac{1}{p(y)\,x + q(y)\,x^n}\right)$. Для их решения надо поменять ролями переменные x и y и считать x функцией от y. В результате для этой функции получим линейное уравнение $x'_y = p(y)x + q(y)$ (или уравнение Бернулли: $x' = p(y)\,x + q(y)\,x^n$).

Например, уравнение $y' = \frac{y^2}{2xy + 3}$, если y считать аргументом, а x — функцией, принимает вид $x'_y = \frac{2xy + 3}{y^2}$, т. е. становится линейным относительно x и x'_y. Решая его способом, указанным в п. 2, получаем $x = Cy^2 - \frac{1}{y}$.

Если и этот метод не приводит к цели, следует проверить, не является ли $f(x, y)$ однородной функцией нулевой степени. Для этого надо образовать функцию $f(\lambda x, \lambda y)$ и проверить, равна ли она при $\lambda \neq 0$ функции $f(x, y)$. В случае выполнения тождества $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$ уравнение решается подстановкой $y = ux$.

Наконец, если и этот метод окажется неудачным, то надо записать заданное уравнение в виде

$$p(x, y)\,dx + q(x, y)\,dy = 0$$

и проверить, не является ли оно уравнением в полных дифференциалах, т. е. выполняется ли условие $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$.

Вопросы для самопроверки

1. Какое дифференциальное уравнение называется уравнением с разделенными переменными?
2. Какие дифференциальные уравнения называются уравнениями с разделяющимися переменными?
3. Какой вид имеет общий интеграл уравнения с разделяющимися переменными вида $y' = f(x)\varphi(y)$, если $\varphi(y) \neq 0$?
4. В каком случае дифференциальное уравнение вида $y' = f(x)\varphi(y)$ имеет решения, не содержащиеся в общем интеграле? Как найти эти решения?
5. Какое дифференциальное уравнение первого порядка называется линейным? Приведите два примера.
6. Какое линейное уравнение называется однородным?
7. К какому классу уравнений относятся однородные линейные уравнения?
8. С помощью какой подстановки решается неоднородное линейное уравнение?
9. Какое дифференциальное уравнение называется уравнением Бернулли? Как его решают?
10. Какая функция называется однородной функцией нулевой степени? Приведите примеры однородных функций нулевой степени.
11. Можно ли однородную функцию нулевой степени считать функцией отношения аргументов? Почему?
12. Какое дифференциальное уравнение называется однородным?
13. Какая подстановка используется для интегрирования однородного дифференциального уравнения?
14. Какую особенность имеет расположение интегральных кривых однородного дифференциального уравнения?
15. Какое дифференциальное уравнение называется уравнением в полных дифференциалах?

2 Заказ 7915

16. Сформулируйте условие, при выполнении которого левая часть уравнения $p(x, y)\,dx + q(x, y)\,dy = 0$ является полным дифференциалом некоторой функции.

17. Какой вид имеет общий интеграл дифференциального уравнения в полных дифференциалах?

Упражнения

Установите, какие из нижеприведенных уравнений являются уравнениями с разделяющимися переменными:

13. $y' = \dfrac{y}{x} - x^3y^4$.
14. $y' = a + nx + my$, a, m, n — постоянные.
15. $y^2\,dx + x^2dy = 0$.
16. $a(xdy + 2ydx) = xydy$, a — постоянная.
17. $(a^2 - x^2)\,dy + xydx = 0$, a — постоянная.

Решите следующие дифференциальные уравнения:

18. $y' = 9y^2 - 4$.
19. $xy' = y \ln y$.
20. $y' \operatorname{tg} x - y = 1$.
21. $(1 + y^2)\,dx = (1 + x^2)\,dy$.
22. $y - xy' = a(1 + x^2y')$.
23. $e^y(1 + x^2)\,dy - 2x(1 + e^y)\,dx = 0$.
24. $ye^{2x}\,dx - (1 + e^{2x})\,dy = 0$.
25. $y(1 + x^2)\,y' = 1 + y^2$.
26. $yy' = \dfrac{1 - 2x}{y}$.

Найдите частные решения уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям:

27. $(1 + e^x)\,yy' = e^x$, $y(0) = 1$.
28. $y' \sin x = y \ln y$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = e$.

Решите дифференциальные уравнения и выделите интегральные кривые, проходящие через указанные точки:

29. $(1 + e^x)yy' = e^x$; $A(1; 1)$.
30. $y' = 2\sqrt{y} \ln x$; $A(e; 1)$.
31. $xy' = \dfrac{y}{\ln x}$; $A(e; 1)$.

Решите дифференциальные уравнения, используя подходящую подстановку:

32. $(x + 2y)\,y' = 1$.
33. $y' = (x + y)^2$.
34. $(x + 2y - 1)\,dx + (2x + 4y + 1)\,dy = 0$ (подстановка $x + 2y = z$).
35. $y' = (x - y)^2 + 1$.
36. $(x + y)^2y' = a^2$.
37. $(x - 3y)\,dx + (2x - 6y + 2)\,dy = 0$.
38. $(x^2y + x)\,dy + (xy^2 - y)\,dx = 0$ (подстановка $xy = u$).

Какие из нижеприведенных уравнений являются линейными:

39. $(x + y)\,y' + x - y = 0$.
40. $xy' - (\sin x)\,y = x^3 - 1$.
41. $y' = -\dfrac{2x + y}{2y + x}$.
42. $xy' + y - e^x = 0$.

43. $xy' + 2y - xy^2 = 0$. 44. $x^2y' - y = x^2 \cos x$?

Найдите общее решение следующих уравнений:

45. $y' - 4y = e^{2x}$. 46. $y' + y = x + 2$.

47. $xy' - y = 2x$.

48. $y' + y = x^2 - 1$. 49. $(2e^y - x)\, y' = 1$.

Найдите методом вариации общее решение следующих уравнений:

50. $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$. 51. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$.

52. $xy' + 2y = x^2$. 53. $y' + y = \cos x$.

Найдите частные решения, удовлетворяющие заданным начальным условиям (задача Коши):

54. $y' + y \cos x = \sin x \cos x$, а) $y(0) = 1$, б) $y(\pi) = 3$.

55. $xy' + y - e^x = 0$, $y(a) = b$.

56. $xy' - \frac{y}{x+1} = x$, $y(0) = 1$.

57. $y' + x^2y = x^2$, $y(2) = 1$.

58. $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$, $y(0) = 0$.

Найдите решения уравнений, ограниченные при $x \to +\infty$:

59. $2\sqrt{x}\, y' - y = -\sin\sqrt{x} - \cos\sqrt{x}$.

60. $y' - y \ln 2 = 2^{\sin x} (\cos x - 1) \ln 2$.

61. Найдите решение $y(x)$, обладающее свойством $y(x) \to 0$ при $x \to +\infty$, следующего уравнения: $2x^2y' - xy = 2x \cos x - 3 \sin x$.

62. Докажите, что для линейного уравнения $y' + ky = q(x)$ с постоянным положительным коэффициентом k и непрерывной положительной функцией $q(x)$, такой, что $\lim\limits_{x \to +\infty} q(x) = b$, все решения обладают свойством $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = \frac{b}{k}$.

Найдите общее решение уравнения Бернулли:

63. $y' + 2xy = 2x^3y^3$.

64. $xy' - 4y = 2x^2\sqrt{y}$.

65. $y' + 2y = y^2 e^x$.

66. $y' - y = (1 + x)\, y^2$.

Решите заданные дифференциальные уравнения:

67. $(x + y)\, dx + (x - y)\, dy = 0$.

68. $(2y - 4x)\, dy + (y + x)\, dx = 0$.

69. $xdy = (\sqrt{x^2 + y^2} + y)\, dx$.

70. $(y^2 - 4xy)\, dx + 4x^2\, dy = 0$.

71. $\left(1 + \frac{x}{y}\right) dx + e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y}\right) dy = 0$. Найдите интегральную кривую, проходящую через точку $A\,(0;\, 2)$.

Какие из нижеприведенных уравнений являются уравнениями в полных дифференциалах:

72. $(2x+y)\,dx+(x-2y)\,dy=0$.
73. $2x\cos^2 y\,dx+(2y-x^2\sin^2 y)\,dy=0$.

74. $\left(4-\frac{y^2}{x^2}\right)dx+\frac{2y}{x}\,dy=0$?

Решите следующие дифференциальные уравнения:
75. $(ye^x-e^y)\,dx+(e^x-xe^y)\,dy=0$.
76. $3x^2e^y\,dx+(x^3e^y-1)\,dy=0$.
77. $\left(\frac{\sin 2x}{y}+x\right)dx+\left(y-\frac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy=0$.
78. $e^{-y}dx+(1-xe^{-y})\,dy=0$.
79. $(\sin xy+xy\cos xy)\,dx+x^2\cos xy\,dy=0$. Выделите интегральную кривую, проходящую через точку $A\left(1;\frac{\pi}{2}\right)$.

80. $\frac{xdx+(12x+y)\,dy}{(x+y)^2}=0$.

81. $\left(\frac{1}{x^2}+\frac{3y^2}{x^4}\right)dx=\frac{2ydy}{x^3}$.

82. $(x\cos 2y+1)\,dx-x^2\sin 2y\,dy=0$.

Определите тип, к которому принадлежит соответствующее уравнение, и проинтегрируйте его:
83. $y'+\frac{1-y^2}{1-x^2}=0$.
84. $(3xy^2+2x^3)\,dx+y^3dy=0,\ x>0$.
85. $y'\cos x+y\sin x=1$.
86. $(y^2-x)\,dx+2xydy=0$.
87. $y'=\frac{y}{x}-x^3y^4$.
88. $(x-y+1)\,y'=x+y+1$.
89. $a\,(xdy+2ydx)=xydy$.
90. $(a^2-x^2)\,dy+xydx=0$.
91. $x^2y'+y^2=xyy'$.
92. $y'=x^2+2x-y$.
93. $(x^2y^2+1)\,dx+2x^2\,dy=0$.
94. $2x\,(x^2+y^2)\,dy=y\,(y^2+2x^2)\,dx$.
95. $(x+y)\,y'+x-y=0$.
96. $xy'-y=x^2\cos x$.
97. $(1+y^2)\,xdx+(1+x^2)\,dy=0$.

98. $y'=x^2+y$.
99. $y'=\frac{x-1}{y}$.

100. $y'=\frac{x}{1-x^2}$. Найдите кривую, проходящую через точку $M\,(0;\ 1)$.

101. $y'=-\frac{2x+y}{2y+x}$.
102. $e^{-y}\,dx+(1-xe^{-y})\,dy=0$.
103. $(1-x^2y)\,dx+x^2\,(y-x)\,dy=0$.
104. $(2y-x^2\sin^2 y)\,dy+2x\cos^2 y\,dx=0$.
105. $xdx+ydy=xdy-ydx$.

106. $\dfrac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \dfrac{ydx - xdy}{x^2}$.

107. $(y + \sin x)\,dy + (y\cos x - x)\,dx = 0$.

108. $y' = 9y^2 - 4$. Найдите частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$.

109. $yy' + y^2 + 4x(x + 1) = 0$.

110. $(3x^2 + y^2)\,dx + (2xy + 2ay)\,dy = 0$.

111. $(2xy + 2y^2 - 9x^2)\,dx + (x^2 + 4xy)\,dy = 0$.

112. $(\sin y - y\sin x)\,dx + (\cos x + x\cos y - e^y)\,dy = 0$.

113. $2yy' + y^2 - 2x - 2 = 0$.

§ 2. РЕШЕНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Математическое моделирование. Дифференциальные уравнения являются одним из самых могучих средств для математического решения практических задач. Особенно широко они используются в теоретической механике и физике.

Математическое исследование любой задачи, касающейся реального мира, распадается на три основных этапа:

а) построение математической модели явления;

б) изучение этой математической модели и получение решения соответствующей математической задачи;

в) приложение полученных результатов к практическому вопросу, из решения которого возникла данная математическая модель, и отыскание других вопросов, к которым она приложима.

Например, некоторые методы математики, возникшие впервые при изучении вопросов гидродинамики, оказались приложимы к аэродинамике, теории электрических и магнитных полей, теории гравитации и многим иным областям физики и техники.

При построении математической модели явления или процесса необходимы его идеализация и формализация. При идеализации явления отделяются условия, существенно влияющие на него, от условий, не оказывающих существенного влияния (по крайней мере, в том приближении, в котором мы решаем задачу). Например, при изучении движения маятника в первом приближении пренебрегают сопротивлением воздуха, трением в точке подвеса, гибкостью нити, формой груза и т. д. Так возникает идеализированная схема изучаемого явления, называемая в физике *математическим маятником*. Исследование этой идеализированной схемы можно уже формализовать, составив дифференциальное уравнение движения.

Ниже мы увидим, что оно имеет вид: $\varphi'' + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$, где φ — угол отклонения нити от вертикального направления, l — ее длина, g — ускорение свободного падения. Это уравнение не решается в квадратурах, но при малых значениях φ справедливо приближенное равенство $\sin\varphi \approx \approx \varphi$, позволяющее заменить полученное уравнение более простым, а именно уравнением $\varphi'' + \frac{g}{l}\varphi = 0$. Это уравнение мы уже умеем решать (см. с. 5—6), причем решение выражается через тригонометрические функции. Тем самым задача свелась к применению хорошо изученной математической модели тригонометрических функций, также возникших в связи с решением практических задач астрономии.

Разумеется, необходимо еще исследовать, в каких границах допустимы сделанные упрощения, как будет меняться решение при учете отброшенных факторов и т. д. Например, учет сопротивления воздуха приведет к тому, что решение примет вид затухающих колебаний (см. ниже с. 151). Далее следует выяснить, какие еще явления описываются той же самой формализованной математической моделью (к ним относятся различного вида колебания жидкостей и газов, электромагнитные колебания и др.).

2. Составление дифференциального уравнения по условию физической задачи. Решение задач физики или механики с помощью дифференциальных уравнений распадается в соответствии со сказанным в п. 1 на следующие этапы:

а) *составление дифференциального уравнения*;

б) *решение этого уравнения*;

в) *исследование полученного решения*.

При этом рекомендуется следующая последовательность действий:

1. *Установить величины, изменяющиеся в данном явлении, и выявить физические законы, связывающие их.*

2. *Выбрать независимую переменную и функцию этой переменной, которую мы хотим найти.*

3. *Исходя из условий задачи, определить начальные или краевые условия.*

4. *Выразить все фигурирующие в условии задачи вели-*

чины через независимую переменную, искомую функцию и ее производные.

5. *Исходя из условий задачи и физического закона, которому подчиняется данное явление, составить дифференциальное уравнение.*

6. *Найти общее решение или общий интеграл дифференциального уравнения.*

7. *По начальным или краевым условиям найти частное решение.*

8. *Исследовать полученное решение.*

Во многих случаях составление дифференциального уравнения первого порядка основывается на так называемой «линейности процесса в малом», т. е. на дифференцируемости функций, выражающих зависимость величин. Как правило, можно считать, что все участвующие в том или ином процессе величины в течение малого промежутка времени изменяются с постоянной скоростью. Это позволяет применить известные из физики законы, описывающие равномерно протекающие явления, для составления соотношения между значениями t, $t + \Delta t$, т. е. величинами, участвующими в процессе, и их приращениями. Получающееся равенство имеет лишь приближенный характер, поскольку величины меняются даже за короткий промежуток времени, вообще говоря, неравномерно. Но если разделить обе части получившегося равенства на Δt и перейти к пределу, когда Δt стремится к нулю, получится точное равенство. Оно содержит время t, меняющиеся с течением времени физические величины и их производные, т. е. является дифференциальным уравнением, описывающим данное явление. То же самое уравнение в дифференциальной форме можно получить, заменив приращение Δt на дифференциал dt, а приращение функций—соответствующими дифференциалами.

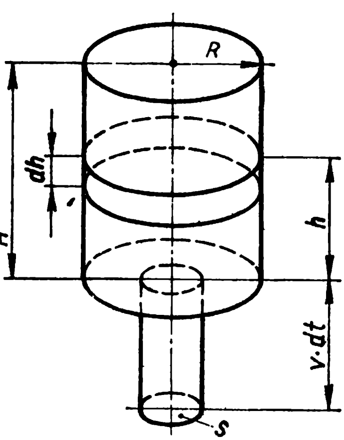

Рис. 2

Таким образом, при составлении дифференциального уравнения мы делаем как бы «мгновенный снимок» процесса в данный момент времени, а при решении уравнения по этим мгновенным снимкам восстанавливаем течение процесса. Итак, в основе решения физических задач с помощью дифференциальных уравнений лежит общая идея *линеаризации* — замены функций на малых промежутках изменения аргумента линейными функциями. И хотя встречаются процессы (например, броуновское движение), для которых линеаризация невозможна, потому что не существует скорости изменения некоторых величин в данный момент времени, в подавляющем большинстве случаев метод дифференциальных уравнений действует безотказно.

Пример 1. В дне цилиндрического сосуда, наполненного водой и имеющего высоту H и радиус основания R, сделано небольшое отверстие площади S (рис. 2). За какой промежуток времени через отверстие вытечет вся вода, если треть воды вытекает за t_1 с?

Решение. Если бы истечение воды происходило равномерно, то решить задачу не представляло бы никаких затруднений — вся вода вытечет за 3 t_1 с. Но наблюдения показывают, что сначала вода вытекает быстро, а по мере снижения уровня воды в сосуде скорость ее истечения уменьшается. Поэтому надо учесть зависимость между скоростью истечения v и высотой h столба жидкости над отверстием. Проведенные итальянским физиком Торричелли эксперименты показали, что скорость v приближенно выражается формулой $v = k\sqrt{2gh}$, где g — ускорение свободного падения и k — «безразмерный» коэффициент, зависящий от вязкости жидкости и формы отверстия (например, для воды в случае круглого отверстия $k = 0{,}6$).

Сделаем «мгновенный снимок» процесса истечения за промежуток времени $[t;\ t+\Delta t]$. Пусть в начале этого промежутка высота жидкости над отверстием равнялась h, а в конце его она понизилась и стала $h+\Delta h$, где Δh — «приращение» высоты (которое, очевидно, отрицательно). Тогда объем жидкости, вытекшей из сосуда, равен объему цилиндра с высотой $|\Delta h| = -\Delta h$ и площадью основания πR^2, т. е. $\Delta V = -\pi R^2 \Delta h$.

Эта жидкость вылилась в виде цилиндрической струйки, имеющей площадь основания S. Ее высота равна пути, пройденному вытекающей из сосуда жидкостью за промежуток времени $[t;\ t+\Delta t]$. В начале этого промежутка времени скорость истечения равнялась по закону Торричелли $k\sqrt{2gh}$, а в конце его она равнялась $k\sqrt{2g(h+\Delta h)}$.

Если Δt весьма мало, то Δh тоже очень мало и потому полученные выражения для скорости почти одинаковы. Поэтому путь, пройденный жидкостью за промежуток времени $[t;\ t + \Delta t]$, выражается формулой

$$(k\,2\sqrt{gh} + \alpha)\,\Delta t,$$

где $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \alpha = 0$. Значит, объем вылившейся за промежуток времени $[t;\ t + \Delta t]$ жидкости вычисляется по формуле

$$\Delta V = (k\sqrt{2gh} + \alpha)\,S\Delta t.$$

Мы получили два выражения для объема жидкости, вылившейся из сосуда за промежуток времени $[t;\ t + \Delta t]$. Приравнивая эти выражения, получаем уравнение

$$-\pi R^2 \Delta h = (k\sqrt{2gh} + \alpha)\,S\Delta t. \qquad (1)$$

Недостатком уравнения (1) является то, что нам неизвестно выражение для α. Чтобы устранить этот недостаток, разделим обе части уравнения (1) на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$. Поскольку $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \alpha = 0$, а $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta h}{\Delta t} = h'$, получаем дифференциальное уравнение

$$-\pi R^2 h' = k\sqrt{2gh}\,S. \qquad (2)$$

Физики обычно рассуждают короче. Они исследуют процесс в течение «бесконечно малого промежутка времени dt» и считают, что за промежуток времени не изменяется скорость истечения жидкости из сосуда. Поэтому вместо приближенного уравнения (1) они получают точное уравнение

$$-\pi R^2\,dh = k\sqrt{2gh}\,S dt, \qquad (2')$$

которое является не чем иным, как дифференциальной формой уравнения (2).

Чтобы решить получившееся уравнение, разделим переменные и обозначим для краткости дробь $\frac{\pi R^2}{Sk\sqrt{2g}}$ через A. Интегрируя обе части получившегося уравнения $dt = \frac{-A dh}{\sqrt{h}}$, получим ответ в виде

$$t = -A(2\sqrt{h} + C). \qquad (3)$$

Мы получили зависимость между t и h, в которую входят две постоянные A и C. Постоянная A зависит от размеров и формы отверстия, вязкости жидкости и других физических параметров, а постоянная C возникла в ходе решения задачи. Их значения нам неизвестны, но их можно найти, учитывая не использованные еще условия задачи.

Сначала найдем значение C. Для этого используем начальные условия. По условию задачи в начале истечения сосуд был наполнен, т. е. высота столба жидкости равнялась H. Иными словами, при $t = 0$ имеем: $h = H$. Подставляя в формулу (3) значения $t = 0$, $h = H$, получаем: $0 = -A\,(2\sqrt{H} + C)$ и потому $C = -2\sqrt{H}$. Поэтому равенство (3) можно переписать в виде

$$t = 2A\,(\sqrt{H} - \sqrt{h}).$$

Чтобы найти значение A, вспомним, что за первые t_1 мин. вытекла треть всей жидкости. Этому соответствует понижение уровня жидкости на $\frac{H}{3}$. Иными словами, при $t = t_1$ имеем: $h = H - \frac{H}{3} = \frac{2}{3}H$. Отсюда находим, что

$$t_1 = 2A\left(\sqrt{H} - \sqrt{\frac{2}{3}H}\right) = 2A\sqrt{H}\left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

и потому

$$A = \frac{t_1}{2\sqrt{H}\left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)} = \frac{3t_1\left(1 + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)}{2\sqrt{H}}. \qquad (4)$$

Теперь уже легко найти время опорожнения сосуда: нам надо найти такое значение t, при котором $h = 0$:

$$t = 2A\,(\sqrt{H} - \sqrt{0}) = \frac{3t_1\left(1 + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)}{\sqrt{H}}(\sqrt{H} - 0) = 3t_1\left(1 + \sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

Полученное значение t в $\left(1 + \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \approx 1{,}82$ раз больше значения $3t_1$, которое получилось в предположении, что жидкость вытекает равномерно.

Разумеется, и это решение не является безукоризненно точным — мы пренебрегли, например, явлениями капиллярности (а они существенны, если диаметр отверстия мал), завихрениями жидкости, так называемым пограничным слоем (слоем жидкости вблизи стенок отверстия, на котором происходит переход значений скорости от нуля до v) и многими иными факторами. Но все же оно точнее, чем решение, основанное на предположении о равномерности истечения жидкости.

Исследуем в заключение полученное решение. Для этого подставим в равенство (4) значение $A=\frac{\pi R^2}{kS\sqrt{2g}}$, найдем t_1 и получим, что

$$t = 3t_1\left(1+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=\frac{2\pi R^2\sqrt{H}}{kS\sqrt{2g}}.$$

Ясно, что, чем больше значения R и H (размеры сосуда), тем дольше будет вытекать из него жидкость, как это и следует из полученного ответа. Далее, чем больше S, т. е. площадь отверстия, тем быстрее вытечет жидкость из сосуда. В том же направлении действует и увеличение ускорения g, а также коэффициента k (чем больше k, тем больше скорость истечения жидкости по формуле Бернулли).

Таким образом, полученная формула выдержала «испытание на здравый смысл». Ее надо еще испытать на размерность. Заметим, что в формуле Бернулли коэффициент k безразмерен и потому имеем:

$$\text{с} = \frac{\text{см}^2\sqrt{\text{см}}}{\text{см}^2\sqrt{\text{см}/\text{с}^2}} = \text{с}.$$

Проведенный контроль подтверждает, что задача решена правильно.

Во многих случаях составление дифференциального уравнения по условию задачи облегчается тем, что соответствующий закон физики связывает между собой значения некоторой величины и скорости ее изменения либо связывает друг с другом значения величины, скорости ее изменения и ускорения.

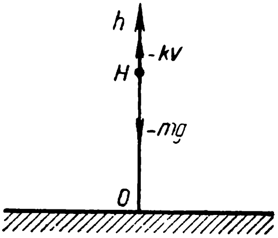

Рис. 3

Пример 2. Парашютист падает под действием силы тяжести. Найдем закон изменения высоты парашютиста над уровнем земной поверхности, если сопротивление воздуха пропорционально скорости его падения, а в начале падения он находился на высоте H, причем был в состоянии покоя.

Решение. По второму закону Ньютона имеем: $F = ma$. Если выбрать направление координатной оси так, как показано на рисунке 3, то $F = -mg - kv$ (сила тяжести направлена в отрицательном направлении, а сила сопротивления воздуха направлена в сторону, противоположную скорости падения). Поэтому равенство $F = ma$ принимает вид: $ma = -mg - kv$. Так как ускорение является производной от скорости $a = v'$, то получаем дифференциальное уравнение $mv' = -mg - kv$, т. е.

$$v' = -g - \frac{k}{m} v. \tag{5}$$

Начальное условие имеет вид: $v(0) = 0$ (начальная скорость падения равна нулю).

Разделяя переменные в уравнении (5) и интегрируя, получим:

$$-\int \frac{dv}{g + \frac{k}{m} v} = \int dt,$$

откуда

$$-\frac{m}{k} \ln\left(g + \frac{k}{m} v\right) = t + C.$$

Так как при $t = 0$ имеем: $v = 0$, то $C = -\frac{m}{k} \ln g$ и поэтому

$$t = \frac{m}{k} \ln g - \frac{m}{k} \ln\left(g + \frac{k}{m} v\right) = \frac{m}{k} \ln \frac{g}{g + \frac{k}{m} v},$$

или

$$\frac{g}{g + \frac{k}{m} v} = e^{\frac{kt}{m}}, \quad g + \frac{k}{m} v = g e^{-\frac{kt}{m}}.$$

Отсюда находим:

$$v = \frac{mg}{k}\left(e^{-\frac{k}{m}t} - 1\right). \qquad (6)$$

Мы получили закон изменения скорости с течением времени. Найдем теперь закон изменения высоты h парашютиста. Для этого заметим, что $v = h'$, и потому получаем дифференциальное уравнение

$$h' = \frac{mg}{k}\left(e^{-\frac{k}{m}t} - 1\right). \qquad (7)$$

Из него вытекает, что

$$h = \frac{mg}{k}\int\left(e^{-\frac{k}{m}t} - 1\right)dt = \frac{mg}{k}\left(-\frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t} - t\right) + C. \qquad (8)$$

По условию при $t = 0$ имеем: $h = H$. Подставляя эти значения в (8), получаем, что $C = H + \frac{m^2g}{k^2}$ и потому

$$h = H + \frac{m^2g}{k^2}\left(1 - \frac{k}{m}t - e^{-\frac{k}{m}t}\right). \qquad (9)$$

При малых значениях t имеем:

$$e^{-\frac{k}{m}t} \approx 1 - \frac{kt}{m} + \frac{k^2t^2}{2m^2}.^{*}$$

Сохраняя лишь первые два слагаемых, получаем из формулы (7), что $v \approx -gt$. Это показывает, что в начале падения парашютист движется почти равноускоренно. Однако в дальнейшем влияние сопротивления воздуха становится ощутимым, и при $t \to +\infty$ имеем: $e^{-\frac{k}{m}t} \to 0$, а потому v стремится к $-\frac{mg}{k}$. Иными словами, движение становится почти равномерным со скоростью $-\frac{mg}{k}$, направленной вниз. Эта скорость пропорциональна силе тяжести mg, действующей на парашютиста, и обратно пропорциональ-

---

* Использована формула Тейлора для функции e^x, $x = -\frac{k}{m}t$.

на коэффициенту k, показывающему силу сопротивления воздуха.

Из формулы (9) можно приближенно найти время, за которое парашютист упадет на земную поверхность. Для этого учтем, что $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\frac{k}{m}t} = 0$, и напишем по формуле (9) приближенное равенство $H + \frac{m^2 g}{k^2}\left(1 - \frac{k}{m}t\right) = 0$. Из него находим, что $t \approx \frac{kH}{mg} + \frac{m}{k}$. Заметим, что слагаемое $\frac{kH}{mg}$ равно времени, которое заняло бы падение парашютиста с постоянной скоростью $\frac{mg}{k}$, а добавка $\frac{m}{k}$ произошла потому, что вначале падение было более медленным.

Замечание. Сделанное при решении задачи предположение о пропорциональности силы сопротивления воздуха скорости падения само было весьма приближенным. Иной ответ получится, если считать эту силу пропорциональной квадрату скорости падения. В этом случае уравнение (5) заменится на

$$mv' = -mg + kv^2$$

(направление силы сопротивления воздуха при выбранном направлении оси положительно). Рекомендуем читателю самостоятельно провести в этом случае выкладки до конца и сравнить ответ с полученным выше.

Пример 3. В замкнутую электрическую цепь последовательно включены источник тока с электродвижущей силой (ЭДС) $E(t)$, меняющейся с течением времени, активное сопротивление R и катушка с индуктивностью L. Выведем закон изменения силы тока с течением времени, если вначале (при $t = 0$) она равнялась нулю.

Решение. Из курса физики известно, что $E(t) = U_{\text{акт}} + U_{\text{кат}}$, где $U_{\text{акт}}$ — напряжение на активном участке цепи, выражаемое по закону Ома $U_{\text{акт}} = RI$, а $U_{\text{кат}}$ пропорционально скорости изменения силы тока с коэффициентом пропорциональности L, $U_{\text{кат}} = LI'$. Тогда имеет место равенство

$$LI' + RI = E(t). \tag{10}$$

Мы получили дифференциальное уравнение для силы тока с начальным условием $I(0) = 0$.

Данное уравнение является линейным (I и I' входят в него в первых степенях). Решая его, находим:

$$I = \frac{1}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \int E(t) e^{\frac{Rt}{L}} dt. \quad (11)$$

Разберем два частных случая:

а) Электродвижущая сила постоянна, $E(t) = E_0$. В этом случае из уравнения (11) имеем:

$$I = \frac{E_0}{L} e^{-\frac{Rt}{L}} \int e^{\frac{Rt}{L}} dt = \frac{E_0}{R}\left(1 + Ce^{-\frac{Rt}{L}}\right).$$

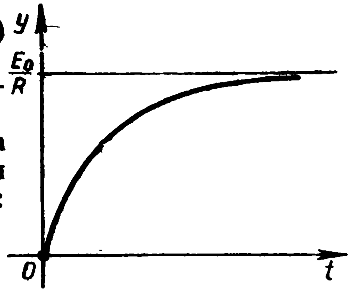

Рис. 4

В силу начального условия $I(0) = 0$, т. е. $0 = \frac{E_0}{R}(1+C)$, откуда получим: $C = -1$ и потому

$$I = \frac{E_0}{R} - \frac{E_0}{R} e^{-\frac{Rt}{L}}. \quad (12)$$

При $t \to +\infty$ получаем, что $I \to \frac{E_0}{R}$, т. е. после включения постоянной электродвижущей силы значение I возрастает от нуля до значения $\frac{E_0}{R}$, даваемого законом Ома (рис. 4).

б) Электродвижущая сила периодически изменяется по синусоидальному закону: $E = E_0 \sin \omega t$. В этом случае из уравнения (11) имеем:

$$I = \frac{E_0}{L} e^{-\frac{Rt}{L}} \int e^{\frac{Rt}{L}} \sin \omega t \, dt.$$

Вычисляя интеграл, получаем, что

$$I = \frac{E_0}{L\left(\frac{R^2}{L^2} + \omega^2\right)} \left(\frac{R}{L} \sin \omega t - \omega \cos \omega t\right) + Ce^{-\frac{Rt}{L}}.$$

Из начального условия $I(0) = 0$ находим, что $C = \frac{E_0 \omega}{L\left(\frac{R^2}{L^2} + \omega^2\right)}$ и потому

$$I = \frac{E_0}{L\left(\frac{R^2}{L^2}+\omega^2\right)}\left(\frac{R}{L}\sin\omega t - \omega\cos\omega t\right) + \frac{E_0\omega}{L\left(\frac{R^2}{L^2}+\omega^2\right)}e^{-\frac{R}{L}}. \quad (13)$$

С течением времени при $t \to +\infty$ второе слагаемое стремится к нулю, и мы получаем, что

$$I \approx \frac{E_0}{L\left(\frac{R^2}{L^2}+\omega^2\right)}\left(\frac{R}{L}\sin\omega t - \omega\cos\omega t\right). \quad (14)$$

Если положить

$$\sqrt{\frac{R^2}{L^2}+\omega^2} = A, \quad \frac{R}{LA} = \cos\alpha, \quad \frac{\omega}{A} = \sin\alpha,$$

то это равенство можно записать в виде

$$I = \frac{E_0}{LA}\sin(\omega t - \alpha).$$

Иными словами, синусоидальные колебания ЭДС дают в пределе синусоидальные колебания силы тока (со сдвигом фазы).

3. Решение геометрических задач с помощью дифференциальных уравнений. Во многих задачах геометрической оптики, картографии и других областей науки возникает необходимость в нахождении кривых по тем или иным свойствам проведенных к ним касательных. Поскольку угловой коэффициент касательной к графику функции равен значению производной этой функции в точке касания, такие задачи решаются обычно с помощью дифференциальных уравнений.

При решении геометрических задач с помощью дифференциальных уравнений рекомендуется следующая последовательность действий:

1) *Сделать чертеж и ввести обозначения.*

2) *Отделить условия, имеющие место в произвольной точке искомой линии, от условий, выполняющихся лишь в отдельных точках, т. е. начальных условий.*

3) *Выразить все упомянутые в задаче величины через координаты произвольной точки и через значение производной в этой точке, учитывая геометрический смысл производной.*

4) *По условию задачи составить дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет искомая кривая.*

5) *Найти общее решение этого уравнения и получить из него с помощью начальных условий уравнение искомой линии.*

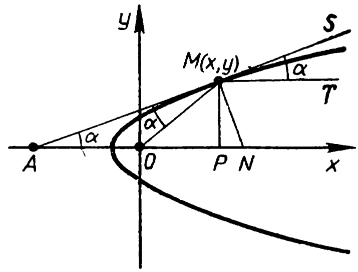

Рис. 5

Пример. По какой поверхности надо отшлифовать зеркало прожектора, чтобы все лучи, выходящие из источника света, помещенного в точке O на оси вращения, отражались бы зеркалом параллельно этой оси (рис. 5)?

Решение. Возьмем меридианное сечение поверхности вращения. Выберем начало координат в точке O, ось абсцисс направим по оси вращения и обозначим угол между положительным направлением оси абсцисс и касательной к искомой кривой, проведенной в точке M (x; y), через α. Тогда по условию задачи имеем: $\angle SMT = \alpha$. Но $\angle OMN = \angle TMN$ (угол падения равен углу отражения), поэтому $\angle OMA = \angle SMT = \alpha$. Таким образом, треугольник OAM равнобедренный и $|OA| = |OM|$. Из чертежа видно, что $|AO| = |AP| - |OP| = y \operatorname{ctg} \alpha - x$. Поскольку $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{y'}$, то $|AO| = \frac{y}{y'} - x$. С другой стороны, $|OM| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Поэтому из равенства $|OA| = |OM|$ следует дифференциальное уравнение

$$\frac{y}{y'} - x = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Его можно представить в дифференциальной форме:

$$y dx = (x + \sqrt{x^2 + y^2})\, dy.$$

Получилось однородное дифференциальное уравнение. Делаем подстановку $x = yu$, $dx = udy + ydu$ и получаем уравнение с разделяющимися переменными:

$$y\,(udy + ydu) = (uy + \sqrt{u^2y^2 + y^2})\, dy.$$

Оно преобразуется к виду

$$\frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}} = \frac{dy}{y}.$$

Отсюда находим, что

$$\ln (u + \sqrt{u^2 + 1}) = \ln y - \ln C,$$

т. е.

$$u + \sqrt{u^2 + 1} = \frac{y}{C}.$$

Запишем полученное уравнение в виде $\left(\frac{y}{C} - u\right)^2 = u^2 + 1$, т. е. $\frac{y^2}{C^2} - \frac{2yu}{C} = 1$, и заменим u на $\frac{x}{y}$. Получаем: $y^2 - 2Cx = C^2$, или окончательно:

$$y^2 = 2C\left(x + \frac{C}{2}\right).$$

Мы получили семейство парабол, симметричных относительно оси абсцисс, с параметром C и вершиной, находящейся в точке $\left(-\frac{C}{2};\ 0\right)$. Легко проверить, что фокусы всех этих парабол находятся в начале координат O. Итак, искомой поверхностью является параболоид вращения, а источник света находится в фокусе вращающейся параболы.

Заметим, что если направить такое параболическое зеркало на Солнце, то все отраженные лучи будут проходить через фокус, где получится высокая температура (отсюда и название focus — очаг). Параболические зеркала применяются и в радиолокации.

4. Дифференциальное уравнение семейства кривых. Ортогональные траектории. Общее решение дифференциального уравнения первого порядка графически изображается семейством интегральных кривых, зависящим от одного параметра C, — каждому значению этого параметра соответствует определенное частное решение, т. е. определенная интегральная кривая. Рассмотрим теперь обратную задачу:

Дано семейство плоских кривых, зависящее от одного параметра, т. е. семейство кривых, заданное уравнением вида

$$\Phi(x, y, C) = 0. \tag{1}$$

Требуется найти дифференциальное уравнение первого порядка, для которого данное семейство было бы общим решением.

С этой целью продифференцируем по x обе части равенства (1). Учитывая, что y — функция от x, получим соотношение

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y' = 0. \qquad (2)$$

А теперь осталось исключить параметр C из соотношений (1) и (2). Для этого можно, например, решить уравнение (1) относительно C и подставить полученное значение C в соотношение (2).

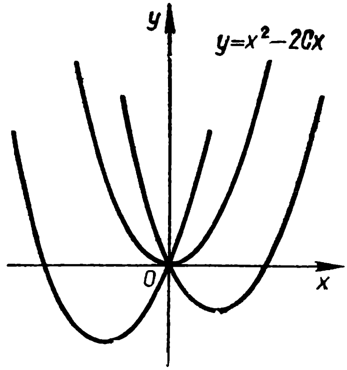

Рис. 6

Уравнение, полученное в результате исключения параметра C из системы уравнений (1) и (2), называют *дифференциальным уравнением семейства плоских кривых*: $\Phi(x, y, C) = 0$.

Пример 1. Найдем дифференциальное уравнение семейства парабол $y = x^2 - 2Cx$ (рис. 6).

Решение. Семейство зависит от одного параметра C. Функция $\varphi(x, C) = x^2 - 2Cx$ непрерывна и дифференцируема в любой точке плоскости. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2Cx, \\ y' = 2x - 2C. \end{cases} \qquad (3)$$

Исключив из нее C, найдем искомое дифференциальное уравнение $xy' - x^2 - y = 0$, для которого $y = x^2 - 2Cx$ является решением. В этом легко убедиться, подставив значения y и y' в это уравнение. Имеем: $x(2x - 2C) - x^2 - (x^2 - 2Cx) \equiv 0$ — верное равенство.

Пример 2. Найдем дифференциальное уравнение семейства кривых $y = Ce^{-x} + \cos x + \sin x$.

Решение. Функция $\varphi(x, C) = Ce^{-x} + \cos x + \sin x$ непрерывна при любом значении x и дифференцируема по x и C. Найдем $y' = -Ce^{-x} - \sin x + \cos x$ и из системы уравнений

$$\begin{cases} y = Ce^{-x} + \cos x + \sin x, \\ y' = -Ce^{-x} - \sin x + \cos x \end{cases} \qquad (4)$$

исключим C. Получим дифференциальное уравнение $y' = -y + 2\cos x$, которому удовлетворяют кривые заданного семейства. Убедитесь в этом.

Линию, пересекающую под прямым углом каждую из кривых данного однопараметрического семейства $\Phi(x, y, C) = 0$, называют *ортогональной траекторией* этого семейства. Отыскание ортогональных траекторий бывает нужно в задачах картографии, навигации и т. д. Ортогональные траектории данного семейства кривых образуют новое семейство линий. Решим следующую задачу:

По заданному уравнению семейства кривых $\Phi(x, y, C)=0$ *написать уравнение семейства ортогональных траекторий этого семейства.*

Для решения этой задачи надо сначала написать дифференциальное уравнение семейства. Пусть оно имеет вид: $F(x, y, y') = 0$ (мы рассматриваем общий случай, когда уравнение не решено относительно производной). Если кривые Γ_1 и Γ_2 пересекаются под прямым углом, то их угловые коэффициенты в точке пересечения взаимно обратны по величине и по знаку: $k_1 = -\frac{1}{k_2}$. Но угловой коэффициент кривой данного семейства равен y'. Отсюда следует, что угловой коэффициент $y'_{\text{орт}}$ ортогональной к ней кривой в той же точке равен $-\frac{1}{y'}$. Из равенства $y'_{\text{орт}} = -\frac{1}{y'}$ следует, что $y' = -\frac{1}{y'_{\text{орт}}}$. Мы показали, что дифференциальное уравнение семейства ортогональных траекторий получается из дифференциального уравнения семейства кривых путем замены y' на $-\frac{1}{y'}$.

Итак, *чтобы найти уравнение семейства ортогональных траекторий для данного однопараметрического семейства плоских кривых*, надо:

1) *написать дифференциальное уравнение данного семейства кривых*;

2) *заменить в этом уравнении* y' *на* $-\frac{1}{y'}$;

3) *найти общее решение получившегося дифференциального уравнения.*

Пример 3. Найдем уравнение ортогональных траекторий семейства гипербол $xy = C$.

Решение. Дифференцируя по x обе части равенства $xy = C$, получаем дифференциальное уравнение данного семейства $y + xy' = 0$. Заменим в этом уравнении y' на

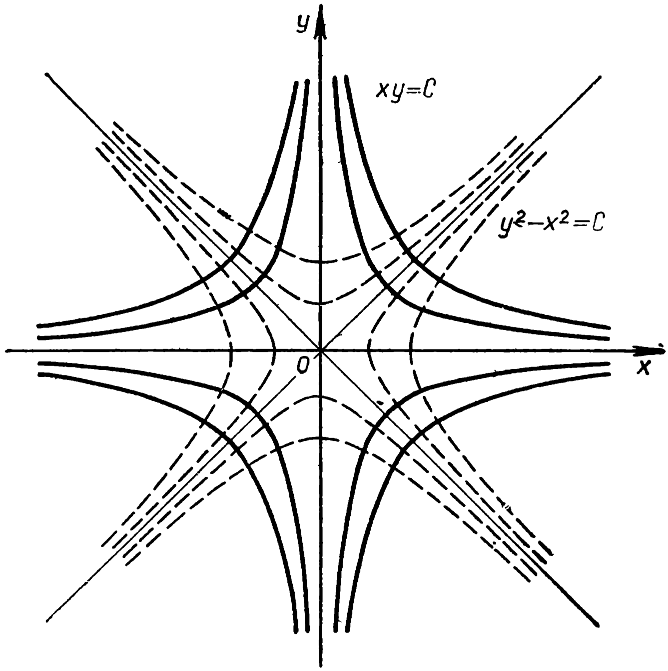

Рис. 7

$-\frac{1}{y'}$. Получаем уравнение $y - \frac{x}{y'} = 0$ с разделяющимися переменными. Решая его, получаем, что

$$y' = \frac{x}{y}, \quad ydy = xdx, \quad \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + \frac{C}{2}$$

и потому

$$y^2 - x^2 = C.$$

Значит, семейством ортогональных траекторий для семейства гипербол $xy = C$ является семейство гипербол $y^2 - x^2 = C$, получаемое из данного поворотом на $\frac{\pi}{4}$ вокруг начала координат (рис. 7).

Аналогично ищут уравнение *изогональных траекторий* данного семейства, т. е. линий, пересекающих все кривые семейства под одним и тем же углом φ. Только здесь вместо соотношения $y_{орт} = -\frac{1}{y'}$ придется использовать соотношение

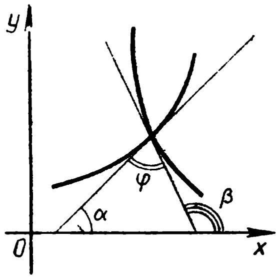

Рис. 8

$$y'_{\text{изог}} = \frac{y' + \operatorname{tg}\varphi}{1 - y' \operatorname{tg}\varphi}.$$

Оно вытекает из того, что $\beta = \alpha + \varphi$ (рис. 8) и потому

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\varphi} = \frac{y' + \operatorname{tg}\varphi}{1 - y' \operatorname{tg}\varphi}.$$

Семейство кривых может зависеть и от нескольких параметров. Например, семейство окружностей радиуса 1

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = 1 \qquad (5)$$

зависит от двух параметров a и b, а семейство парабол

$$y = k(x - a)^2 + b \qquad (6)$$

от трех параметров k, a, b.

Если семейство кривых зависит от n параметров, т. е. задается уравнением вида

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0, \qquad (7)$$

то оно является семейством интегральных кривых дифференциального уравнения n-го порядка. Чтобы вывести это уравнение, нужно n раз продифференцировать уравнение (7) по x (имея в виду, что y — функция от x), после чего исключить из полученной системы $n + 1$ уравнений n параметров $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Пример 4. Напишем дифференциальное уравнение семейства парабол $(y - x)^2 = C_1x + C_2y + C_3$.

Решение. Продифференцируем равенство $(y - x)^2 = C_1x + C_2y + C_3$ трижды по x:

$$2(y - x)(y' - 1) = C_1 + C_2y', \qquad (8)$$

$$2(y' - 1)^2 + 2(y - x)y'' = C_2y'', \qquad (9)$$

$$6(y' - 1)y'' + 2(y - x)y''' = C_2y'''. \qquad (10)$$

Чтобы исключить из последних двух уравнений C_2, умножим (9) на y''', а (10) на y'' и почленно вычтем получившиеся равенства. После упрощения получаем уравнение третьего порядка:

$$(y' - 1)((y' - 1)y''' - 3(y'')^2) = 0. \qquad (11)$$

5. Решение задач с помощью интегральных уравнений. В некоторых случаях решение задач приводит к уравнениям, содержащим искомую функцию под знаком интеграла, т. е. так называемым *интегральным уравнениям.* Такие уравнения после дифференцирования обеих частей иногда сводятся к дифференциальным уравнениям.

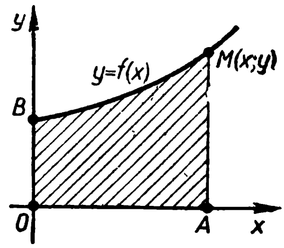

Рис. 9

Пример 1. Найдем кривую, обладающую следующим свойством: для любой точки $M(x; y)$ центр тяжести криволинейной трапеции, ограниченной осями координат, дугой этой кривой и отрезком, соединяющим точку M с ее проекцией на ось абсцисс (рис. 9), равен $\frac{3}{4}$ абсциссы этой точки.

Решение. Как доказывается в интегральном исчислении, абсцисса центра тяжести данной криволинейной трапеции выражается формулой

$$\xi = \frac{\int_0^x ty(t)\,dt}{\int_0^x y(t)\,dt},$$

где t — переменная интегрирования, а $y = y(t)$ — уравнение искомой кривой.

По условию задачи имеем уравнение

$$\frac{\int_0^x ty(t)\,dt}{\int_0^x y(t)\,dt} = \frac{3}{4}x. \qquad (1)$$

Так как искомая функция содержится под знаком интеграла, это уравнение является интегральным. Запишем это уравнение в виде

$$\int_0^x ty(t)\,dt = \frac{3}{4}x \int_0^x y(t)\,dt$$

и продифференцируем обе части равенства по x. Поскольку производная интеграла по верхнему пределу равна соответствующему значению подынтегральной функции, получаем уравнение

$$xy(x) = \frac{3}{4}xy(x) + \frac{3}{4}\int_0^x y(t)\,dt,$$

которое также является интегральным. После приведения подобных членов и вторичного дифференцирования получаем дифференциальное уравнение $y' = 2\frac{y}{x}$, общее решение которого имеет вид: $y = Cx^2$.

Итак, требуемым свойством обладает любая парабола из семейства $y = Cx^2$.

Заметим, что, вообще, любое дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y) \tag{2}$$

с начальными условиями $y(x_0) = y_0$ равносильно интегральному уравнению

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt. \tag{3}$$

В самом деле, из равенства (3) следует, что

$$y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(t, y(t))\,dt = y_0$$

и потому выполнено начальное условие. Далее, если функция φ является решением уравнения (3), то имеет место равенство

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,dt. \tag{4}$$

Дифференцируя обе части этого равенства по x, получаем, что $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$, откуда видно, что та же функция φ является решением уравнения (2).

Обратно, пусть функция $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению $y' = f(x, y)$, т. е. пусть $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$. Заменим в этом равенстве x на t, проинтегрируем обе части равенства $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ по t от x_0 до x и примем во внимание, что $\varphi(x_0) = y_0$. Получим равенство (4), показывающее, что данная функция удовлетворяет и уравнению (3).

Пример 2. Функция $y = x^2 + \sin x$ является решением дифференциального уравнения

$$y' = 2x + \sqrt{1 - (y - x^2)^2},$$

удовлетворяющего начальному условию $y(0) = 0$. Значит, эта функция является решением интегрального уравнения

$$y = \int_0^x (2x + \sqrt{1 - (y - x^2)^2}\,dx.$$

Упражнения

Геометрические задачи

114. Найдите кривую, проходящую через точку $A(1; 3)$, для которой отрезок касательной между точкой касания и осью Oy делится пополам в точке пересечения с осью Ox.

115. Найдите кривую, проходящую через точку $A(3; 2)$ и обладающую тем свойством, что отрезок любой касательной, заключенный между координатными осями, делится пополам в точке касания.

116. Найдите кривую, проходящую через точку $A(2; 4)$, зная, что абсцисса точки пересечения касательной в произвольной точке кривой с осью Ox равна удвоенной абсциссе точки касания.

117. Определите кривые, для которых площадь прямоугольника, построенного на отрезках, отсекаемых касательной в любой точке кривой на осях координат, в четыре раза больше площади прямоугольника, построенного на отрезках перпендикуляров, опущенных из точки кривой на оси координат.

118. Определите кривые, зная, что сумма координат точек пересечения касательной к кривой с осями координат в два раза больше суммы координат точки касания.

119. Найдите кривую, проходящую через точку $A(1; 2)$, для которой абсцисса точки пересечения касательной в произвольной точке с осью абсцисс равна $\frac{2}{3}$ абсциссы точки касания.

120. Найдите кривую, зная, что ордината точки пересечения нормали в произвольной точке кривой с осью ординат равна удвоенной ординате этой точки.

121. Найдите кривые, для которых расстояние от начала координат до точки на кривой равно длине отрезка касательной, заключенного между этой точкой и осью абсцисс.

122. Найдите кривые, для которых угол между радиус-вектором, проведенным в точку M кривой, и касательной, проведенной в точке M, постоянен и равен α.

123. Найдите кривые, для которых проекция на ось абсцисс от-

резка касательной, заключенного между точкой касания и осью абсцисс, равна среднему арифметическому координат точки касания.

124. Найдите кривые, для которых отношение отрезка оси абсцисс, отсекаемого перпендикуляром к касательной, к радиус-вектору точки касания есть величина постоянная, равная k.

125. Определите кривые, для которых площадь прямоугольника с вершинами в начале координат, в точке кривой с положительной абсциссой и в проекциях этой точки на оси координат равна площади треугольника с вершинами в той же точке кривой, в ее проекции на ось Ox и в точке пересечения касательной с осью Ox.

126. Найдите кривую, проходящую через точки $O(0; 0)$ и $A(1; 1)$ и ограничивающую криволинейную трапецию с основанием $[0; x]$, площадь которой пропорциональна y^4.

Указание. Используйте выражение площади криволинейной трапеции через определенный интеграл.

Естественнонаучные задачи

127. За 30 дней распалось 50% первоначального количества радиоактивного вещества. Через сколько времени останется 1% от первоначального количества вещества, если известно, что количество радиоактивного вещества, распадающегося за единицу времени, пропорционально количеству этого вещества, имеющегося в распоряжении в данный момент.

128. Время, в течение которого первоначальное количество радиоактивного вещества уменьшается вдвое, называется его *периодом полураспада*. Определите время, в течение которого из 10 г вещества останется 1 г, если период полураспада этого вещества составляет 1 год.

129. Культуре из 100 бактерий предоставлена возможность размножаться при благоприятных условиях. Через 12 ч обнаруживается, что культура содержит 500 бактерий. Сколько бактерий будет через 2 суток после начала опыта?

130. Культуре из 400 бактерий предоставлена возможность размножаться при благоприятных условиях. Через 2 ч число бактерий увеличилось в два раза. Через сколько часов их будет в 16 раз больше?

131. Количество света, поглощаемое слоем воды, пропорционально количеству падающего на него света. Слой воды толщиной 3 м поглощает половину первоначального количества света. Какая часть первоначального количества света дойдет до глубины 60 м?

132. Метр толщины стекла определенного сорта поглощает $\frac{1}{4}$ света, проходящего через него. Какой толщины надо взять стекло, чтобы оно поглощало только 1% проходящего света?

Указание. Использовать закон поглощения света слоем воды (см. задачу 131).

133. Если десятиметровый слой воды поглощает 40% света, падающего на ее поверхность, то на какой глубине дневной свет солнца будет равен лунному, яркость которого составляет $\frac{1}{3} \cdot 10^{-5}$ яркости дневного света на поверхности воды?

134. На сколько увеличится длина l эластичного шнура под действием его веса P_1, если подвесить шнур за один конец, а к нижнему концу подвесить груз P_2?

Указание. Использовать закон Гука: эластичный шнур длиной l под действием натягивающей силы F получает приращение длины, равное klF (k — константа, зависящая от материала шнура).

135. За какое время вытечет вся вода из цилиндрического бака, диаметр основания которого 2 м и высота 3 м, через отверстие в дне диаметром 6 см (считая, что ось цилиндра вертикальна)?

136. За какое время вода, заполняющая полусферическую чашу диаметра 2 м, вытечет через круглое отверстие в дне чаши диаметром 0,2 м?

137. В баке находится 60 л раствора, содержащего 5 кг соли. В бак непрерывно подается вода со скоростью 3 л в минуту, которая перемешивается с имеющимся раствором. Смесь вытекает с той же скоростью. Сколько соли в баке останется через час?

138. Моторная лодка движется в стоячей воде со скоростью 5 м/с. На полном ходу мотор был выключен, и через 40 с скорость ее стала равной 2 м/с. Считая, что сила сопротивления воды пропорциональна скорости движения лодки, определите скорость лодки через 2 мин после выключения мотора.

139. Пуля, летевшая со скоростью $v_1 = 200$ м/с, пробивает доску толщиной 40 см и вылетает с другой стороны доски со скоростью $v_2 = 80$ м/с. Сколько времени пуля пробивала доску, если сопротивление доски движению пули пропорционально скорости пули?

140. Тело, нагретое до температуры $T_0 = 200°$, остывает на воздухе, температура которого равна 20°. Через 5 мин после начала остывания температура тела равна 60°. Через какое время оно остынет до температуры 25°, если скорость остывания пропорциональна разности температуры тела и воздуха?

141. Скорость химической реакции пропорциональна произведению концентраций реагирующих веществ, причем в процессе реакции молекула одного вещества реагирует с молекулой другого вещества. Какое количество вещества образуется через t с, если начальная концентрация первого вещества равна $c_1 \dfrac{\text{моль}}{\text{м}^3}$, а второго $c_2 \dfrac{\text{моль}}{\text{м}^3}$?

142. При некоторых химических реакциях вещество, образующееся в ходе реакции, действует как катализатор, увеличивающий скорость реакции. В этом случае скорость реакции пропорциональна как произведению концентраций реагирующих веществ, так и некоторой линейной функции от концентрации образующегося вещества (концентрация выражена в молях на кубический метр). Какое количество вещества образуется через t с после начала реакции, если первоначальные концентрации реагентов равны c_1 и c_2, а линейная функция имеет вид $ky + c$?

143. Решите задачу 142 при условии: катализатор реакции — первое из участвующих в ней веществ.

144. Скорость возрастания численности некоторой популяции животных зависит от двух факторов — положительного и отрицательного. При положительном факторе численность популяции животных возрастает со скоростью, пропорциональной количеству животных в данный момент, при отрицательном — убывает со скоростью, пропорциональной квадрату численности популяции. Напишите закон изменения количества животных с течением времени, если первоначальная численность популяции равнялась a.

145. Сосуд объемом 40 л содержит 80% азота и 20% кислорода.

В сосуд каждую секунду втекает 0,2 л азота и вытекает столько же смеси. Через сколько времени в сосуде будет 99 % азота?

146. Докажите, что для тяжелой жидкости, вращающейся вокруг вертикальной оси, свободная поверхность имеет форму параболоида вращения.

147. Материальная точка массой m подброшена вертикально вверх с начальной скоростью v_0. Найдите закон изменения скорости v, если на точку, кроме силы тяжести, действует тормозящая сила сопротивления воздуха, пропорциональная квадрату скорости (коэффициент пропорциональности равен k).

148. Радиоактивное вещество A в момент времени $t = 0$ содержит известное число атомов $A(0) = A_0$. Вещество A распадается, образуя вещество B, которое тоже распадается. Найдите закон указанного радиоактивного распада, считая число атомов вещества B в момент времени $t = 0$ равным нулю: $B(0) = 0$.

149. Найдите закон изменения силы тока в цепи с самоиндукцией L, если $I = I_0$ при $t = 0$ и $E = E_0 \sin \omega t$.

150. Найдите кривые, для которых площадь треугольника, образованного осью Ox, касательной и радиус-вектором точки касания, постоянна и равна a^2.

151. Найдите кривую, средняя ордината которой на отрезке $[0; x]$, т. е. величина $\frac{1}{x}\int\limits_0^x y\,dx$, пропорциональна ординате, соответствующей правому концу отрезка $[0; x]$.

152. Найдите y из интегрального уравнения

$$x\int\limits_0^x y\,dx = (x+1)\int\limits_0^x xy\,dx.$$

Составьте дифференциальные уравнения заданных семейств кривых:

153. $y = Cx^3$.

154. $y = \sin Cx$.

155. $x^2 - y^2 = Cx$.

156. $y = Cx + C^2$.

157. $x^2 + (y - b)^2 = 1$, b — параметр.

158. $x^2 + y^2 = 2Cx$. Изобразите кривые (окружности) для значений $C = \pm 1; \pm 2$.

159. Составьте дифференциальное уравнение семейства парабол, проходящих через точку $A(0; 1)$ и касающихся оси Ox.

160. Составьте уравнения семейства окружностей, касающихся оси Ox, центры которых лежат на прямой $y = 1$, и найдите дифференциальное уравнение этого семейства.

161. Найдите ортогональные траектории семейства кривых:

а) $y = Cx$, б) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = C^2$, в) $y^2 = Cx + C^2$.

§ 3. РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ВИДОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

1. Понижение порядка дифференциального уравнения. Одним из основных методов решения дифференциальных уравнений высшего порядка является понижение их порядка и сведение к уравнению первого порядка. Рассмотрим некоторые типы уравнений, допускающих понижение порядка.

а) *Уравнение вида*

$$y^{(n)} = f(x) \qquad (1)$$

— наиболее простое дифференциальное уравнение n-го порядка. Решается последовательным понижением его порядка.

Обозначим $y^{(n-1)}$ через z. Тогда $z' = (y^{(n-1)})' = y^{(n)}$, и потому уравнение (1) принимает вид: $z' = f(x)$. Интегрируя обе части этого уравнения, получаем, что $z = \int f(x)\,dx$, т. е. что $y^{(n-1)} = \int f(x)\,dx$. Если обозначить через f_1 одну из первообразных функции f, получим, что

$$y^{(n-1)} = f_1(x) + C_1. \qquad (2)$$

Порядок исходного уравнения понизился на единицу. Интегрируя теперь (2), получим:

$$y^{(n-2)} = \int f_1(x)\,dx + C_1x = f_2(x) + C_1x + C_2. \qquad (3)$$

Проинтегрировав n раз, найдем $y(x)$.

Пример 1. Найдем частное решение уравнения $y''' = \cos x$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = -5$; $y'(0) = 1$; $y''(0) = 4$.

Решение. Найдем сначала трехкратным интегрированием общее решение уравнения

$$y'' = \int \cos x dx = \sin x + C_1,$$
$$y' = -\cos x + C_1 x + C_2,$$
$$y = -\sin x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3.$$

Из этих равенств следует, что $y(0) = C_3; y'(0) = -1 + C_2$; $y''(0) = C_1$. Используя начальные условия, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} C_3 = -5, \\ -1 + C_2 = 1, \\ C_1 = 4, \end{cases}$$ решение которой: $C_1 = 4; C_2 = 2;\ C_3 = -5$.

Искомым частным решением является функция $y = -\sin x + 2x^2 + 2x - 5$.

Пример 2. Однородная горизонтальная балка длиной l с постоянным поперечным сечением закреплена в левом конце и находится под действием вертикальной силы P, приложенной к правому концу балки и направленной вниз (рис. 10). Найдем уравнение изогнутой оси балки и вычислим прогиб балки на правом конце.

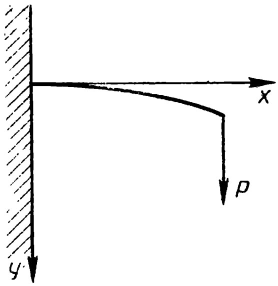

Рис. 10

Решение. Известно, что при малом изгибе уравнение изогнутой оси балки удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M_x, \qquad (4)$$

где E — модуль Юнга, I — момент инерции площади поперечного сечения относительно оси балки, M_x — изгибающий момент в сечении с абсциссой x, равный сумме моментов относительно точки x всех сил, расположенных справа от сечения. При данных условиях E и I — постоянные, а изгибающий момент в сечении с абсциссой x равен:

$$M_x = -P\,(l - x)$$

(знак «минус» объясняется тем, что сила P направлена вниз). Таким образом, уравнение изогнутой оси балки

$$y'' = -\frac{P}{EI}(l - x). \qquad (5)$$

Проинтегрировав его дважды, найдем общее решение уравнения

$$y = -\frac{P}{EI}\frac{(l-x)^3}{6} + C_1x + C_2.$$

Очевидно, $y\,(0) = 0$. Кроме того, ось Ox является касательной к изогнутой оси балки в левом конце. Уравнение оси Ox $y = 0$, поэтому $y'\,(0) = 0$. Следовательно, имеем начальные условия: $y\,(0) = 0$, $y'\,(0) = 0$. Используя их, найдем значения C_1 и C_2:

$$C_1 = -\frac{Pl^2}{2EI};\; C_2 = \frac{Pl^3}{6EI}.$$

Ось балки расположится по линии, уравнение которой

$$y = -\frac{P}{EI}\left(\frac{(l-x)^3}{6} + \frac{l^2x}{2} - \frac{l^3}{6}\right). \qquad (6)$$

Величина прогиба на правом конце балки (при $x = l$) равна:

$$|y\,(l)| = \frac{Pl^3}{3EI}. \qquad (7)$$

В динамике материальной точки уравнения вида $x'' = f(t)$ встречаются при изучении прямолинейного движения точки в случае, когда сила, действующая на эту точку, зависит только от момента времени.

Пример 3. Изучим движение материальной точки массой m, движущейся по прямой линии под действием силы, меняющейся по закону: $F = ke^{-\lambda t}$, если начальные координаты и скорость точки равнялись нулю: $x(0) = v(0) = 0$.

Решение. В силу второго закона Ньютона получим дифференциальное уравнение

$$mx'' = ke^{-\lambda t}.$$

Дважды интегрируя, получим: $x' = -\frac{k}{\lambda m}e^{-\lambda t} + C_1$ и $x = \frac{k}{\lambda^2 m}e^{-\lambda t} + C_1 t + C_2$. Значит, общее решение уравнения имеет вид:

$$x = \frac{k}{\lambda^2 m}e^{-\lambda t} + C_1 t + C_2.$$

Учитывая, что $x(0) = x'(0) = 0$, получим:

$$C_1 = \frac{k}{\lambda m}, \quad C_2 = -\frac{k}{\lambda^2 m} \text{ и потому}$$

$$x = \frac{k}{\lambda^2 m}(e^{-\lambda t} + \lambda t - 1).$$

Мы нашли закон движения точки. Поскольку $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-\lambda t} = 0$, получаем, что с течением времени это движение приближается к равномерному движению по закону:

$$x = \frac{k}{\lambda m}t - \frac{k}{\lambda^2 m}.$$

б) *Уравнение вида*

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (8)$$

не содержит явно искомой функции и производных до k—1-го порядка включительно. Оно приводится к уравнению порядка $n - k$ заменой

$$z = y^{(k)}. \qquad (9)$$

Действительно, дифференцируя (9), получим: $z' = \frac{y^{(k+1)}}{k+1}, \ldots$ $\ldots, z^{(n-k)} = y^{(n)}$; поэтому с помощью подстановки (9) уравнение (8) приводится к уравнению

$$F(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}) = 0,$$

т. е. к уравнению $n-k$-го порядка. Проинтегрировав это уравнение, найдем новую искомую функцию $z = f(x, C_1, \ldots, C_{n-k})$. Но $z = y^{(k)}$, в результате получим уравнение k-го порядка $(k < n)$:

$$y^{(k)} = f(x, C_1, \ldots, C_{n-k})$$

относительно $y(x)$, рассмотренное в пункте а). Проинтегрировав его k раз, найдем общее решение уравнения (8).

Пример 4. Найдем общее решение уравнения

$$y''' + 2xy'' = 0.$$

Решение. Здесь $n = 3$, $k = 2$. Полагая $z = y''$, получим уравнение первого порядка $z' + 2xz = 0$ с разделяющимися переменными $z' = -2xz$, откуда $\frac{dz}{z} = -2xdx$. Интегрируя, получим:

$$\ln|z| = -x^2 + \ln C_1^*, \quad C_1^* > 0,$$

откуда

$$|z| = C_1^* e^{-x^2}, \text{ или } z = C_1 e^{-x^2}, \; C_1 \gtrless 0.$$

Возвращаясь к y, получим уравнение 2-го порядка вида, рассмотренное в пункте а):

$$y'' = C_1 e^{-x^2}.$$

Дважды интегрируя, найдем общее решение заданного уравнения в виде

$$y = C_1 \int \left(\int e^{-x^2} \, dx\right) dx$$

(в данном случае интегралы не выражаются через элементарные функции).

Пример 5. Точка массой m движется по прямой под действием силы F_1, изменяющейся по синусоидальному закону $F_1 = A \sin \omega t$. Сопротивление среды пропорционально скорости точки: $F_{\text{сопр}} = -kv$. Выведем закон движения точки, если ее начальные положение и скорость равнялись нулю.

Решение. По условию результирующая сила F, действующая на точку, состоит из слагаемых вида $A \sin \omega t$ и $-kv$. Поэтому в силу второго закона Ньютона имеем равенство $ma = A \sin \omega t - kv$ или, поскольку $a = x''$, $v = x'$, дифференциальное уравнение

$$mx'' + kx' = A \sin \omega t.$$

Начальными условиями являются $x(0) = x'(0) = 0$.

Введем новую переменную $x' = v$. Тогда $x'' = v'$, и мы получим уравнение

$$v' + \frac{k}{m} v = \frac{A}{m} \sin \omega t$$

с начальным условием $v(0) = 0$. Оно совпадает с уравнением примера 3 (случай б) п. 2 § 2, и его решение имеет вид:

$$v = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{Am}{(k^2 + \omega^2 m^2)} \left(\frac{k}{m} \sin \omega t - \omega \cos \omega t \right).$$

Так как $v(0) = 0$, то $C = \dfrac{Am\omega}{k^2 + \omega^2 m^2}$ и потому

$$v = \frac{Am}{k^2 + \omega^2 m^2} \left(\omega e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{k}{m} \sin \omega t - \omega \cos \omega t \right).$$

Поскольку $v = x'$, то для отыскания x имеем уравнение

$$x' = \frac{Am}{k^2 + \omega^2 m^2} \left(\omega e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{k}{m} \sin \omega t - \omega \cos \omega t \right).$$

Интегрируя, получим:

$$x = \frac{Am}{k^2 + \omega^2 m^2} \left(-\frac{\omega m}{k} e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{k}{m\omega} \cos \omega t - \sin \omega t \right) + C_2.$$

Поскольку $x(0) = 0$, то $C_2 = \dfrac{A\left(\dfrac{\omega m}{k} + \dfrac{k}{m\omega}\right) m}{k^2 + \omega^2 m^2} = \dfrac{A}{k\omega}$.

Поэтому

$$x = \frac{A}{k\omega} + \frac{Am}{k^2 + \omega^2 m^2} \left(-\frac{\omega m}{k} e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{k}{m\omega} \cos \omega t - \sin \omega t \right).$$

в) *Уравнение вида*

$$y^{(n)} = f(y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{10}$$

не содержит в явном виде аргумент x.

Ради простоты ограничимся случаем, когда $n=2$, т. е. уравнениями вида

$$y'' = f(y, y'). \qquad (10')$$

Для решения таких уравнений применяется следующий искусственный прием: за новый аргумент принимают y, а за искомую функцию берут $y' = p$ (если y — координата прямолинейно движущейся точки, то это значит, что ищут выражение скорости этой точки через координату).

Так как $y'_x = p$, то $y''_{x^2} = p'_x$. По формуле дифференцирования сложной функции имеем: $p'_x = p'_y y'_x = p'_y p$. Подставив в уравнение $(10')$ найденные значения y'_x и y''_{x^2}, получим дифференциальное уравнение первого порядка:

$$pp'_y = f(y, p).$$

Пусть $p = \varphi(y, C_1)$ — общее решение полученного уравнения. Заменяя в этом решении p на y'_x, получаем уравнение с разделяющимися переменными: $y'_x = \varphi(y, C_1)$, или, иначе, $\frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = dx$. Общий интеграл этого уравнения имеет вид:

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2,$$

или

$$\Phi(y, C_1) = x + C_2,$$

где $\Phi(y, C_1)$ — одна из первообразных функции $\frac{1}{\varphi(y, C_1)}$.

Пример 6. Решим уравнение $y'' + \omega^2 y = 0$.

Решение. Это уравнение не содержит в явном виде x. Поэтому примем y за новый аргумент, а $p = y'$ — за новую искомую функцию. Так как $y'' = p\frac{dp}{dy}$, то

$$p\frac{dp}{dy} + \omega^2 y = 0.$$

Значит,

$$pdp = -\omega^2 ydy, \text{ где } |y| < |C_1|.$$

Интегрируя это уравнение и полагая $C = \frac{C_1^2\omega^2}{2}$, имеем:

$$\frac{p^2}{2} = -\frac{\omega^2 y^2}{2} + \frac{1}{2} C_1^2 \omega^2,$$

т. е. $|p| = \omega\sqrt{C_1^2 - y^2}$. Так как $p = y'$, то при $y' > 0$ получим уравнение $y' = \omega\sqrt{C_1^2 - y^2}$, т. е.

$$\frac{dy}{\omega\sqrt{C_1^2 - y^2}} = dx.$$

Интегрируя, получаем: $\frac{1}{\omega}\arcsin\frac{y}{C_1} = x + C_2$.

Отсюда следует, что

$$y = C_1 \sin\omega(x + C_2). \tag{11}$$

Если $y' < 0$, то решение уравнения $y' = -\omega\sqrt{C^2 - y^2}$ может быть получено из решения уравнения (11) изменением знака ω. Ниже мы укажем более простой способ решения этого дифференциального уравнения.

Пример 7. Материальная точка P (маятник) массой m подвешена на нерастяжимой нити длиной l, массой которой можно пренебречь. Маятник выведен из положения равновесия и затем отпущен. Точка P начнет двигаться по окружности радиуса l, расположенной в вертикальной плоскости (рис. 11). Найдем закон движения маятника, если он в начальный момент времени ($t = 0$) отклонен от положения равновесия на угол φ_0 $\left(\varphi_0 < \frac{\pi}{2}\right)$ и имеет начальную скорость, равную нулю.

Решение. Положение маятника можно определить углом $\varphi = \angle AOP$. Пусть s—длина дуги $\overset{\frown}{AP}$, взятая с соответствующим знаком: $s = l\varphi$. Касательная — составляющая силы, равная $mg\sin\varphi$, направлена в сторону убывания s. По второму закону Ньютона получаем дифференциальное уравнение

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg\sin\varphi. \tag{12}$$

Сократив на m и заменив s на $l\varphi$, получим уравнение

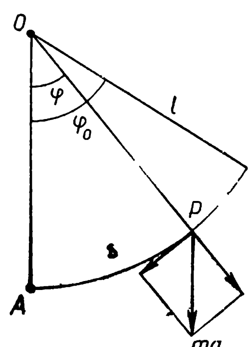

Рис. 11

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi. \qquad (13)$$

Это уравнение колебаний математического маятника; оно не содержит явно независимой переменной t, т. е. относится к рассматриваемому сейчас виду. Полагая $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$, $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \omega\frac{d\omega}{d\varphi}$, преобразуем уравнение (13) в уравнение первого порядка

$$\omega\frac{d\omega}{d\varphi} = -\frac{g}{l}\sin\varphi,$$

или

$$\omega d\omega = -\frac{g}{l}\sin\varphi d\varphi,$$

откуда, интегрируя, получим:

$$\frac{\omega^2}{2} = \frac{g}{l}\cos\varphi + C_1.$$

Так как ω — угловая скорость, то при $t = 0$ ($v = 0$) и $\omega = 0$. Поэтому при $t = 0$ получим:

$$C_1 = -\frac{g}{l}\cos\varphi_0 \quad (\varphi(0) = \varphi_0),$$

$$\omega^2 = \frac{2g}{l}(\cos\varphi - \cos\varphi_0)$$

и, следовательно,

$$\omega = \pm\sqrt{\frac{g}{l}\cdot 2(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}.$$

Поскольку при возрастании t угол φ убывает, производная $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ должна быть отрицательной и потому

$$\omega = -\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}. \qquad (14)$$

Заменив в (14) ω через $\frac{d\varphi}{dt}$ и разделив переменные, придем к уравнению

$$dt = -\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}}.$$

Интегрируя, получим:

$$t + C_2 = -\sqrt{\frac{l}{g}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}}. \qquad (15)$$

Интеграл в (15) не выражается в элементарных функциях.

Учитывая начальные условия, это решение запишем в виде

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int\limits_{\varphi}^{\varphi_0} \frac{du}{\sqrt{2(\cos u - \cos\varphi_0)}}. \qquad (16)$$

2. Системы дифференциальных уравнений. Во введении было отмечено, что многие задачи прикладного характера приводят к системам дифференциальных уравнений. Покажем, что любое дифференциальное уравнение высшего порядка можно записать в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка. Пусть это уравнение имеет вид:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}).$$

Введем новые переменные, положив $y_k = y^{(k)}$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$ и $y_0 = y$. Так как $(y^{(k)})' = y^{(k+1)}$, то $(y_k)' = y_{k+1}$, и потому получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} y_0' = y_1, \\ y_1' = y_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_{n-1}' = f(x, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}). \end{cases} \qquad (1)$$

Например, уравнение $y''' = x^2y'' + y$ равносильно следующей системе дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} y_0' = y_1, \\ y_1' = y_2, \\ y_2' = x^2y_2 + y_0, \end{cases}$$

где $y_0 = y$.

В общем виде система n дифференциальных уравнений первого порядка с n неизвестными функциями, разрешенная относительно производных, имеет вид:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \ldots, y_n). \end{cases} \qquad (2)$$

Такую систему удобно записывать в векторном виде. С этой целью введем векторы $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ и $\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_n)$. Тогда систему (2) можно заменить одним векторным дифференциальным уравнением

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}). \qquad (3)$$

Начальные условия для системы дифференциальных уравнений (2) задаются в виде $y_k(x_0) = y_{k0}$, $1 \leqslant k \leqslant n$ или в векторной записи в виде $\boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0$, где $\boldsymbol{y}_0 = (y_{10}, \ldots, y_{n0})$. Путем дифференцирования уравнений и исключения неизвестных можно свести решение системы дифференциальных уравнений первого порядка к решению одного дифференциального уравнения высшего порядка.

Вопросы для самопроверки

1. Как понижают порядок дифференциального уравнения, если оно:

а) не содержит явно искомой функции;

б) не содержит в явном виде независимой переменной?

2. Как записать уравнение высшего порядка в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка?

Упражнения

Найдите общее решение заданных уравнений:

162. $y''' = 27 \cos 3x + 6$.

163. $(1 + x^2) y'' + y'^2 + 1 = 0$.

164. $y''' (1 + y'^2) - 3y' y''^2 = 0$.

165. $y''' - 2y'' = 0$.

166. $xy'' - y' = e^x x^2$.

167. Из общего интеграла уравнения $yy'' + y'^2 = 0$ выделите интегральную кривую, проходящую через точку A (0; 1) и касающуюся в этой точке прямой $x + y = 1$.

168. Найдите семейство кривых, для которых отношение радиуса кривизны к длине нормали равно 2.

Выделите кривую, для которой $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

169. Найдите семейство кривых, у которых радиус кривизны равен длине нормали.

170. Если тело не слишком быстро погружается в воду, то сопротивление воды можно считать пропорциональным скорости. Найдите закон движения тяжелой материальной точки, погружающейся в воду, если начальная скорость равна нулю.

171. Тяжелое тело скользит по наклонной плоскости. Найдите закон движения, если угол наклона плоскости к горизонтальной поверхности равен α, коэффициент трения k, $v_0 = 0$.

172. Материальная точка массой m движется по прямой под действием ньютоновского притяжения к массе M, помещенной в начало координат. В начале движения она находилась в точке A (x_0) и ее начальная скорость равнялась $v_0 : x'(0) = v_0$. Какой должна быть начальная скорость, чтобы расстояние от движущейся точки до начала координат могло неограниченно увеличиваться (вторая космическая скорость)? Выразите вторую космическую скорость через x_0 и a — ускорение силы тяготения в точке A (x_0).

173. Материальная точка массой m падает под действием силы тяжести с высоты H. Найдите закон движения точки, если $v_0 = 0$ и сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости.

174. Материальная точка массой m движется по прямолинейному пути к центру, притягивающему ее с силой $F = \frac{mk^2}{r^2}$, где r — расстояние от точки до центра. Через какое время точка достигнет центра, если движение начинается с состояния покоя при $r = a$?

175. Материальная точка массой m отталкивается от прямой с силой, пропорциональной расстоянию от точки до этой прямой, коэффициент пропорциональности k^2m. В начальный момент расстояние от точки до прямой равно a, а начальная скорость равна v_0 и направлена параллельно прямой. Напишите уравнение траектории, по которой движется точка.

176. Запишите дифференциальное уравнение высшего порядка в виде системы уравнений первого порядка:

а) $y''' = (y')^2 + xy$;

б) $y^{\mathrm{IV}} = 3xy'' - 4y \sin x$;

в) $y'' = \sin y' + x^3 e^y$;

г) $y'' = k\,(1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}$.

177. Исключите функцию z из системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} y' = 3y + xz, \\ z' = 2xy + z. \end{cases}$$

Глава II

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА И СИСТЕМ ТАКИХ УРАВНЕНИЙ

1. Поле направлений. В физике часто используют понятие *векторного поля*, т. е. функции, ставящей в соответствие каждой точке некоторой области Ω вектор. Например, при изучении течения жидкости каждой точке ставят в соответствие вектор скорости течения в этой точке. При изучении системы электрических или магнитных зарядов каждой точке M ставится в соответствие вектор силы, с которой эта система действует на помещенный в M единичный (пробный) заряд; эти векторы образуют линии индукции магнитного поля данной системы зарядов.

Если отвлечься от длин векторов, образующих векторное поле, а учитывать лишь их направления, получим поле направлений — каждой точке области соответствует определенное направление.

Определение. *Полем направлений* в области Ω называется функция, ставящая в соответствие каждой точке M этой области определенное направление (или, иначе, прямую, проходящую через данную точку).

Предположим, что область Ω и все направления поля лежат в одной и той же плоскости (в этом случае поле направлений называется *плоским*). Выберем на плоскости систему координат. Тогда направление поля в точке M (x, y) задается функцией $k = f(x, y)$, где k — угловой коэффициент направления в данной точке (т. е. тангенс угла φ, образованного полем с положительным направлением оси абсцисс, отсчитываемого против часовой стрелки). В точках, где поле параллельно оси ординат, считаем, что $k = \infty$.

Пример 1. Пусть поле задано равенством $k = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$. Тогда в точке $A(1; 0)$ поле образует с положительным направлением оси абсцисс такой угол φ, что $k = \frac{1^2+0^2}{1^2-0^2} = 1$, т. е. $\varphi = \frac{\pi}{4}$. А в точке $B(1;\ 1)$ угол φ таков, что $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1^2+1^2}{1^2-1^2} = \infty$, т. е. $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

При построении поля направлений, заданного формулой $k = f(x, y)$, удобно использовать так называемые *изоклины*[1], т. е. линии, вдоль которых поле имеет одно и то же направление. Изоклины поля задаются равенствами вида $f(x, y) = C$.

Пример 2. Построим поле направлений, заданное равенством $k = \frac{y}{x}$.

Решение. Изоклины этого поля направлений задаются равенством $\frac{y}{x} = C$, т. е. $y = Cx$, а потому являются прямыми, проходящими через начало координат (сама точка $O(0;\ 0)$ *выбрасывается из этих прямых*, так как при $x = 0$, $y = 0$ дробь $\frac{y}{x}$ не имеет числового значения). Для прямой $y = Cx$ угловой коэффициент поля равен C, т. е. совпадает с угловым коэффициентом изоклины. Поэтому поле имеет вид, изображенный на рисунке 12.

Пример 3. Построим поле направлений, заданное равенством $k = -\frac{x}{y}$.

Решение. В данном случае изоклины задаются формулами $-\frac{x}{y} = C$, т. е. $y = -\frac{x}{C}$, и потому тоже являются прямыми, проходящими через начало координат, из которых выброшена точка $O(0;\ 0)$. Но в данном случае угловой коэффициент изоклины $y = -\frac{x}{C}$ равен $-\frac{1}{C}$, а угловой коэффициент поля направлений на этой изоклине равен C. Так как $-\frac{1}{C}\cdot C = -1$,

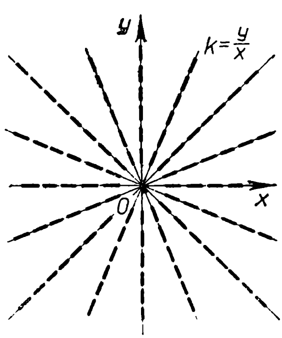

Рис. 12

[1] От греческих слов isos — равный, clineo — наклон.

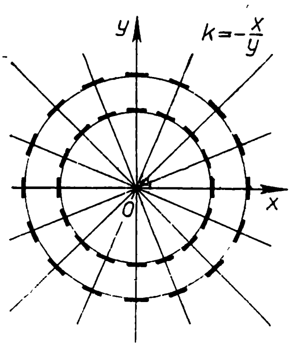

Рис. 13

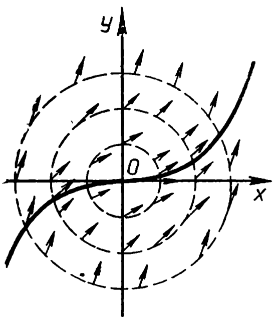

Рис. 14

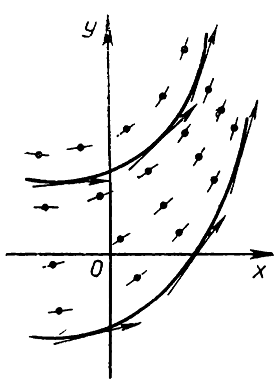

Рис. 15

то изоклины в каждой точке (кроме точки O (0; 0)) перпендикулярны направлению поля в этой точке. Поле направлений и изоклины показаны на рисунке 13.

Пример 4. Построим поле направлений, заданное равенством $k = x^2 + y^2$.

Решение. В данном примере изоклины задаются равенством $x^2 + y^2 = C$, т. е. являются окружностями с центром в начале координат. При $C = 0$ получаем «окружность нулевого радиуса», т. е. точку O (0; 0). В этой точке $k = 0$ и потому поле параллельно оси абсцисс. На окружности $x^2 + y^2 = 1$ радиуса 1 имеем: $k = 1$, и потому поле образует угол $\frac{\pi}{4}$ с положительным направлением оси абсцисс. Это поле направлений и его изоклины изображены на рисунке 14.

2. Поле направлений и дифференциальные уравнения. В физике рассматривают линии индукции данного магнитного поля, т. е. линии, направление которых в каждой точке совпадает с направлением этого поля (рис. 15). В математике вместо «линии индукции магнитного поля» говорят «интегральные кривые».

Определение. Линия γ называется *интегральной кривой* данного поля направлений, если направление касательной к ней в любой ее точке M совпадает с направлением поля в точке M.

Для примера 2 (п. 1) интегральными кривыми являются лучи, выходящие из начала координат, — вдоль каждого такого луча его направление совпадает с направлением поля. А для примера 3 (п. 1) интегральными кривыми являются окружности с центром в начале координат — в этом примере в каждой точке поле направлено перпендикулярно лучу, соединяющему начало координат с этой точкой, а известно, что касательная к окружности в каждой точке перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания. Для примера 4 (п. 1) мы не можем дать описания интегральных кривых. Тем не менее можно приближенно изобразить, например, интегральную кривую, проходящую через начало координат (см. рис. 14).

Пусть $y = \varphi(x)$ — уравнение интегральной кривой Γ поля направлений, заданного равенством $k = f(x, y)$, и пусть $M(x, \varphi(x))$ — точка, лежащая на этой кривой. Мы знаем, что угловой коэффициент касательной к кривой Γ в точке M равен $\varphi'(x)$. Так как он совпадает с угловым коэффициентом направлений поля в точке $M(x, \varphi(x))$, то должно выполняться равенство $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$. Это равенство показывает, что функция φ является решением дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$.

Обратно, если функция φ является решением дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, то график этой функции является интегральной кривой для поля направлений, заданного равенством $k = f(x, y)$.

Мы установили, таким образом, геометрический смысл дифференциального уравнения первого порядка вида $y' = f(x, y)$. Такому уравнению ставится в соответствие поле направлений, заданное равенством $k = f(x, y)$, а решениями дифференциального уравнения являются функции, графики которых служат интегральными кривыми этого поля направлений.

Пример 1. Мы видели выше, что интегральными кривыми поля направлений $k = \frac{y}{x}$ являются прямые, проходящие через начало координат. К такому же выводу приходим, решая дифференциальное уравнение $y' = \frac{y}{x}$. После разделения переменных получаем: $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$, откуда находим, что $\ln|y| = \ln|x| + \ln C$ и потому $y = Cx$.

Пример 2. Мы видели выше, что интегральными кривыми поля направлений $k = -\frac{x}{y}$ являются окружности с центром в начале координат. К такому же выводу приходим, решая уравнение $y' = -\frac{x}{y}$. После разделения переменных получаем: $ydy = -xdx$, откуда находим, что $\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + \frac{C}{2}$ и потому $x^2 + y^2 = C$.

Используя геометрический смысл дифференциального уравнения первого порядка, можно, не решая уравнения, найти точки экстремума и точки перегиба для интегральных кривых этого уравнения.

Пример 3. Найдем множество точек, в которых интегральные кривые дифференциального уравнения $y' = x^2 - y$ могут иметь экстремумы.

Решение. В точке экстремума производная функции (если она существует) равна нулю. Поэтому искомое множество точек задается уравнением $x^2 - y = 0$, т. е. является параболой.

Пример 4. Найдем множество точек, в которых интегральные кривые дифференциального уравнения $y' = x^2 + y^2$ могут иметь перегиб.

Решение. В точке перегиба вторая производная (если она существует) обращается в нуль. Дифференцируя по x обе части равенства $y' = x^2 + y^2$ и принимая во внимание, что y — функция от x, получаем, что $y'' = 2x + 2yy'$. Но $y' = x^2 + y^2$, и потому $y'' = 2x + 2y(x^2 + y^2)$. Значит, искомое множество точек задается уравнением $2x + 2y(x^2 + y^2) = 0$.

Переходя к полярным координатам и учитывая, что $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, находим уравнение искомого множества в виде $r^2 = -\mathrm{ctg}\,\varphi$.

Замечание. Понятие интегральной кривой является более общим, чем понятие графика решения дифференциального уравнения. В точках, где направление поля параллельно оси ординат, угловой коэффициент поля обращается в бесконечность, и потому в этих точках уравнение $y' = f(x, y)$ выполняется лишь в обобщенном смысле слова (обе части уравнения обращаются в бесконечность). Поэтому интегральная кривая может состоять из нескольких графиков, соединяющихся в точках, где поле имеет вертикальное направление. Например, окружности $x^2 + y^2 = C$ — интегральные кривые поля $k = -\frac{x}{y}$ — состоят из графиков двух функций: $y = \sqrt{C - x^2}$ и $y = -\sqrt{C - x^2}$.

Аналогичный геометрический смысл имеет система дифференциальных уравнений первого порядка. Пусть она задана в векторной форме:

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}), \qquad (1)$$

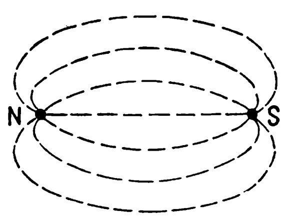

Рис. 16

где $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, $\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_n)$. Тогда любому набору $(x_0, \boldsymbol{y}_0) = (x_{01}, y_{10}, \ldots, y_{n0})$ значений переменных $x, y_1, \ldots, y_n$ соответствует вектор в $(n+1)$-мерном пространстве, имеющий координаты $(1, f_1(x_0, \boldsymbol{y}_0), \ldots, f_n(x_0, \boldsymbol{y}_0))$. Тем самым задается поле направлений в $(n+1)$-мерном пространстве. Линии, касающиеся в каждой точке этого поля направлений, называются интегральными кривыми данного поля. Решение системы уравнений (1) и заключается в отыскании этих интегральных кривых.

3. **Особые точки.** Точки, в которых поле не имеет определенного направления, называются *особыми точками* этого поля. Например, для полей $k = \frac{y}{x}$ и $k = -\frac{x}{y}$ особой точкой является начало координат: при $x = 0$ и $y = 0$ ни дробь $\frac{y}{x}$, ни дробь $-\frac{x}{y}$ не имеют определенного значения. Видим, что вблизи особой точки поле имеет самые разнообразные направления. Поле, изображенное на рисунке 12, встречается в физике при изучении поля скоростей жидкости, истекающей из начала координат. Поле, изображенное на рисунке 13, встречается в физике при изучении поля скоростей жидкости, вращающейся вокруг начала координат (вихря), а также при изучении магнитного поля вокруг прямолинейного электрического тока. На рисунке 16 изображены силовые линии магнитного поля (N и S — полюсы магнита). Точки N и S — особые точки этого поля.

Особые точки поля направлений $k = f(x, y)$ называют и особыми точками дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$.

Пример. Найдём особые точки уравнения $y' = \frac{x^2 + y^2 - 5}{xy - 2}$.

Решение. Функция $\frac{x^2+y^2-5}{xy-2}$ не имеет определенного значения, если $x^2+y^2-5=0$ и $xy-2=0$.

Решая систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2+y^2-5=0, \\ xy-2=0, \end{cases}$$

получаем особые точки $A(1, 2)$, $B(2, 1)$, $C(-1, -2)$, $D(-2, -1)$.

Вопросы для самопроверки

1. Приведите примеры векторных полей из физики.
2. Что называется полем направлений?
3. Какие линии называются интегральными для данного поля направлений?
4. Какое поле направлений связано с дифференциальным уравнением $y' = f(x, y)$? Чем являются для этого уравнения интегральные кривые поля направлений?
5. Что такое изоклины данного поля направлений?
6. Какие точки называются особыми для данного поля направлений? Сколько интегральных кривых данного поля направлений может проходить через особую точку этого поля?
7. Приведите примеры особых точек из физики.
8. Каков геометрический смысл системы дифференциальных уравнений первого порядка?

Упражнения

1. Определите угол между направлениями поля $k = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ в точках $A(3;\ 1)$ и $B(2;\ 4)$.

2. Найдите множество точек плоскости, в которых поле направлений $k = (x-1)^2 + (y+4)^2$ образует угол $\frac{\pi}{4}$ с положительным направлением оси абсцисс.

С помощью изоклин постройте поле направлений для следующих дифференциальных уравнений:

3. $y' = x^2 + y^2$. 4. $y' = x^2 - y^2$. 5. $y' = y - x^2$. 6. $y' = \frac{y}{2x}$.
7. $y' = x^2 + 2x - y$. 8. $y' = 1 + y^2$.

Найдите особые точки следующих дифференциальных уравнений:

9. $y' = \frac{x+3y-8}{x-2y}$. 10. $y' = \frac{x^2+y^2-13}{xy-6}$.

11. $y' = \dfrac{x^3 + y^3 - 28}{x + y - 4}$. 12. $y' = \dfrac{x^4 + y^4 - 97}{x + y - 5}$.

13. $y' = \dfrac{x + y - 5}{x^2 - xy + y^2 - 7}$. 14. $y' = \dfrac{x^2 - xy + y^2 - 19}{x - xy + y + 3}$.

Найдите множество экстремальных точек для интегральных кривых следующих дифференциальных уравнений:

15. $y' = x^2 y + y - 9$. 16. $y' = y^2 e^{2x} - 4$.

17. $y' = y^3 \sin^6 x - 1$. 18. $y' = 4x + 4y - 3xy$.

Найдите множество точек перегиба интегральных кривых для следующих дифференциальных уравнений:

19. $y' = e^y - x$. 20. $y' = x^2 + y^2$.

21. $y' = x^3 + y$. 22. $y' = x + y^3$.

23. Каким вектором задается направление поля в точке (3; —4; 1) трехмерного пространства, если это поле соответствует системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} y' = 2xy - z^2, \\ z' = x + yz^3? \end{cases}$$

§ 2. ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ

1. Теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения $y' = f(x,y)$. Во всех разобранных в главе I и в § 1 данной главы примерах через каждую точку, не являющуюся особой для уравнения $y' = f(x, y)$, проходила одна и только одна интегральная линия этого уравнения. Например, через любую отличную от начала координат точку плоскости проходит лишь один луч, начинающийся в начале координат (т. е. единственная интегральная линия уравнения $y' = \frac{y}{x}$), и одна и только одна окружность с центром в начале координат (т. е. единственная интегральная линия уравнения $y' = -\frac{x}{y}$). Из теорем существования и единственности соответствующие утверждения для разобранных ранее примеров будут следовать как частные случаи.

Следующий пример показывает, что в некоторых случаях через точку может проходить и несколько интегральных кривых уравнения $y' = f(x, y)$.

Пример 1. Покажем, что через точку $M(1; 0)$ проходят по крайней мере две интегральные кривые дифференциального уравнения $y' = \sqrt[3]{y^2}$.

Решение. Ясно, что одним из решений дифференциального уравнения $y' = \sqrt[3]{y^2}$, удовлетворяющим начальному условию $y(1) = 0$, является функция $y = 0$ (соответствующей интегральной линией является ось абсцисс). Но функция $y=\left(\frac{x-1}{3}\right)^3$ тоже является решением этого уравнения, так как для нее имеем: $y'=\left(\frac{x-1}{3}\right)^2$, $\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{\left(\frac{x-1}{3}\right)^6}=\left(\frac{x-1}{3}\right)^2$, и потому $y'=\sqrt[3]{y^2}$. При этом при $x=1$ имеем: $y=0$, и потому это решение удовлетворяет тому же начальному условию $y(1)=0$.

Таким образом, для выполнения теоремы существования и единственности решения дифференциального уравнения $y'=f(x, y)$ функция $f(x, y)$ должна удовлетворять дополнительным требованиям. Они сформулированы в следующей теореме:

Теорема. *Пусть функция f непрерывна в прямоугольнике Ω* (рис. 17): $x_0-a\leqslant x\leqslant x_0+a$, $y_0-b\leqslant y\leqslant y_0+b$ *и имеет в нем непрерывную частную производную по y. Тогда найдутся отрезок $[x_0-l; x_0+l]$ и заданная на нем функция φ такие, что $\varphi'(x)=f(x, \varphi(x))$ и $\varphi(x_0)=y_0$. Другой функции с этими свойствами на отрезке $[x_0-l; x_0+l]$ не существует.*

Иными словами, при выполнении условий теоремы существует отрезок $[x_0-l; x_0+l]$, на котором уравнение $y'=f(x, y)$ имеет одно и только одно решение φ, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(x_0)=y_0$.

Подробное доказательство этой теоремы приведено в книге Виленкина Н. Я., Балка М. Б., Петрова В. А. «Математический анализ. Мощность. Метрика. Интеграл» (М., 1980, см. теорему 14.4) на с. 86, где показано, что в качестве l можно выбрать наименьшее из чисел a, $\frac{b}{M}$, $\frac{1}{2L}$*, где M — наибольшее значение функции $|f|$ в прямоугольнике Ω, а L — наибольшее значение в том же прямоугольнике функции $|f'_y|$(эти наибольшие значения существуют, так как по условию функции f и f'_y, а тем самым и функции $|f|$ и $|f'_y|$ непрерывны в Ω, а потому ограничены в этом прямоугольнике).

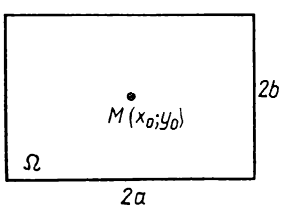

Рис. 17

* В указанной книге вместо L написано K и ошибочно написано $\frac{1}{K}$ вместо $\frac{1}{2K}$.

В данной книге мы укажем лишь план этого доказательства. Сначала дифференциальное уравнение $y' = f(x,y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$ нужно заменить равносильным интегральным уравнением (см. с. 56):

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\ y(t))\,dt. \qquad (1)$$

После этого построить последовательность функций $y_0(x)$, $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, полагая $y_0(x) = y_0$ и

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\ y_n(t))\,dt \qquad (2)$$

при $n \geqslant 0$. Далее доказать, что на отрезке $[x_0 - l;\ x_0 + l]$ эта последовательность функций равномерно сходится к решению $y(x)$ данного уравнения, причем это решение удовлетворяет начальному условию $y(x_0) = y_0$, а других решений при том же начальном условии уравнение $y' = f(x, y)$ не имеет.

Замечание. Условие непрерывности в Ω функции f'_y можно ослабить. Достаточно потребовать существования такого числа L, что для любых точек $A(x;\ y_1)$ и $B(x;\ y_2)$ из Ω с одинаковыми абсциссами выполняется неравенство

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leqslant L\,|y_2 - y_1|. \qquad (3)$$

Если функция f имеет в Ω ограниченную (в частности, непрерывную) частную производную по y, то существует число $L = \sup\limits_{\Omega} |f'_y(x, y)|$. В этом случае в силу теоремы Лагранжа имеем:

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leqslant |f'_y(x, C)(y_2 - y_1)| \leqslant L\,|y_2 - y_1|,$$

а потому условие (1) выполняется в Ω. Это условие называют *условием Липшица*. В подавляющем большинстве случаев достаточно, однако, сформулированного в теореме условия непрерывности f'_y.

Пример 2. Найдем точки плоскости, в которых нарушаются условия теоремы существования и единственности решения дифференциального уравнения:

а) $y' = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$; б) $y' = \sqrt[3]{y^2}$; в) $y' = \sqrt[3]{y^2} + 1$.

Решение. а) Функция $\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ непрерывна и имеет непрерывную частную производную по y на всей плоскости, за исключением точки $O(0;\ 0)$. Эта точка является особой точкой уравнения а).

б) Функция $\sqrt[3]{y^2}$ непрерывна на всей плоскости. Ее частная производная по y равна $\frac{2}{3\sqrt[3]{y}}$ и разрывна на оси абсцисс. В данном случае точки, где не выполнены условия теоремы существования и единственности, образуют целую линию $y = 0$, причем функция $y = 0$ тоже является решением данного уравнения. Такое решение, как $y = 0$, называют особым решением данного дифференциального уравнения. (Более подробно такие решения рассмотрим ниже.)

в) Функция $\sqrt[3]{y^2} + 1$ тоже непрерывна на всей плоскости, а ее частная производная по y обращается в бесконечность на оси абсцисс. Но в этом случае функция $y = 0$ не является решением уравнения в), а потому оно не имеет особых решений.

2. Теорема существования и единственности решений дифференциальных уравнений высшего порядка. Для дифференциальных уравнений высшего порядка справедлива следующая теорема, являющаяся обобщением теоремы 1п.1:

Теорема 1. *Пусть функция f от переменных x, $y, y_1, \ldots, y_{n-1}$ непрерывна в прямоугольном параллелепипеде Ω:*

$x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a$, $y_0 - b \leqslant y \leqslant y_0 + b$, $y_0^{(m)} - b \leqslant \leqslant y_m \leqslant y_0^{(m)} + b$, $1 \leqslant m \leqslant n - 1$ и имеет в нем непрерывные частные производные по переменным $y, y_1, \ldots, y_{n-1}$. Тогда существует отрезок $[x_0 - l;\ x_0 + l]$, на котором уравнение $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ имеет единственное решение φ, удовлетворяющее начальным условиям Коши:

$\varphi(x_0) = y_0$, $\varphi'(x_0) = y_0^1$, $\ldots$, $\varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}$.

Пример. Выясним, при каких значениях x, y, y' выполняются условия теоремы существования и единственности решения дифференциального уравнения $(x^2 - 1)\,y'' - xy' + y\sin x = 0$.

Решение. Имеем:

$$y'' = \frac{x}{x^2 - 1}\,y' - \frac{y\sin x}{x^2 - 1}.$$

Правая часть этого уравнения непрерывна и имеет непрерывные частные производные по y и y', если $x^2 - 1 \neq 0$, т. е. если $x \neq -1$ и $x \neq 1$. При этом условии имеет место существование и единственность решения.

Теорема 1 тоже доказывается путем построения последовательности функций, сходящейся к решению данного уравнения. В качестве l можно взять наименьшее из чисел a, $\frac{b}{M}$ и $\frac{1}{2(L+1)}$, где M — наибольшее из значений функций $|f(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1})|$, $|y|$, ..., $|y_{n-1}|$ в Ω, а L — наибольшее из значений $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$, $\left|\frac{\partial f}{\partial y_1}\right|$, ..., $\left|\frac{\partial f}{\partial y_{n-1}}\right|$ в Ω.

Теорема, аналогичная теореме 1, имеет место для систем дифференциальных уравнений первого порядка.

Теорема 2. *Пусть векторная функция* $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$ *непрерывна в прямоугольном параллелепипеде* Ω*: $x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a$, $y_{k0} - b \leqslant y_k \leqslant y_{k0} + b$, $1 \leqslant k \leqslant n$ *и имеет в нем непрерывные частные производные по переменным* $y_1, \ldots, y_n$. *Тогда существует отрезок* $[x_0 - l;\ x_0 + l]$, *на котором система дифференциальных уравнений* $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$ *имеет единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям Коши:* $\boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0$, *где* $\boldsymbol{y}_0 = (y_{10}, \ldots, y_{n0})$.

Эта теорема также доказывается методом последовательных приближений, которые ведутся по формуле

$$\boldsymbol{y}_{k+1}(x) = \boldsymbol{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}_k(t))\, dt.$$

Здесь $\boldsymbol{y}_k(x)$ не компоненты вектора $\boldsymbol{y}$, а вектор-функции, последовательно получающиеся в ходе приближений. Интеграл от вектор-функции понимается как вектор, получаемый интегрированием каждой компоненты.

3. Дифференциальные уравнения и степенные ряды. Первоначально теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка была доказана Коши с помощью степенных рядов. При этом ему пришлось налагать на функцию $f(x, y)$ более жесткие ограничения, а именно требовать, чтобы ее можно было разложить в некоторой окрестности точки $M(x_0;\ y_0)$ в ряд по степеням $x - x_0$ и $y - y_0$.

Теорема. *Пусть существует окрестность точки* $M(x_0;\ y_0)$, *в которой функция* $f(x, y)$ *является суммой степенного ряда вида*

---

* Это означает, что в Ω непрерывны компоненты $f_1, \ldots, f_n$ вектор-функции $\boldsymbol{f}$.

$$f(x, y)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{km}(x-x_0)^k (y-y_0)^m. \qquad (1)$$

Тогда существует одно и только одно решение дифференциального уравнения $y'=f(x, y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0)=y_0$ и представляемое в виде степенного ряда:

$$y=y_0+\sum_{n=1}^{\infty} b_n (x-x_0)^n. \qquad (2)$$

Эта теорема, доказательство которой мы опускаем, утверждает не только существование искомого решения, но и возможность разложить его в ряд по степеням $x-x_0$. Но в этой теореме на функцию f налагаются более жесткие условия (она должна быть суммой степенного ряда (1), откуда вытекают и ее непрерывность, и непрерывность ее частной производной по y). Кроме того, единственность доказана лишь в классе функций, разложимых в ряды по степеням $x-x_0$, и потому не исключается существование других решений, не разложимых в такие ряды.

Приведем пример, показывающий, как находить первые члены разложения в степенной ряд.

Пример 1. Найдем первые пять членов разложения в ряд по степеням $x-1$ для решения уравнения

$$y'=x^2+y^2, \qquad (3)$$

удовлетворяющего начальному условию $y(1)=0$.

Решение. В нашем случае $x_0=1$, $y_0=0$. Подставляя эти значения в уравнение (3), находим, что $y'(1)=1^2+0^2=1$. Дифференцируя обе части уравнения (3) по x и принимая во внимание, что y — функция от x, получаем:

$$y''=2x+2yy'. \qquad (4)$$

Поскольку $x_0=1$, $y_0=0$, $y'(1)=1$, находим, что $y''(1)=2\cdot 1+2\cdot 0\cdot 1=2$. Далее, дифференцируя равенство (4) по x, получаем, что

$$y'''=2+2(y')^2+2yy''.$$

Отсюда находим, что $y'''(1)=2+2\cdot 1^2+2\cdot 0\cdot 2=4$. Далее получаем: $y^{(4)}=6y'y''+2y\cdot y'''$, откуда $y^{(4)}(1)=12$.

По формуле Тейлора* первые члены разложения y по степеням $x-1$ имеют вид:

$$y = 0 + \frac{1}{1!}(x-1) + \frac{2}{2!}(x-1)^2 + \frac{4}{3!}(x-1)^3 + $$
$$+ \frac{12}{4!}(x-1)^4 + \ldots = (x-1) + (x-1)^2 + \frac{2}{3}(x-1)^3 +$$
$$+ \frac{1}{2}(x-1)^4 + \ldots . \qquad (5)$$

Аналогично решаются с помощью степенных рядов уравнения высшего порядка.

Пример 2. Найдем первые четыре члена разложения по степеням x для решения уравнения

$$y'' = xy' + y, \qquad (6)$$

удовлетворяющего начальным условиям: $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

Решение. Из уравнения (6) находим, что $y''(0) = 1$. Дифференцируя по x обе части уравнения (6), находим, что $y''' = 2y' + xy''$. Значит, $y'''(0) = 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 = -2$. Далее, таким же образом находим, что $y^{(4)} = 3y'' + xy'''$ и потому $y^{(4)}(0) = 3$. Значит, $y = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8} + \ldots$.

Пример 3. Найдем первые четыре члена разложения в ряд по степеням $x-1$ для решений системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} y' = x + z^2, \\ z' = 2z - y, \end{cases}$$

удовлетворяющих начальным условиям: $y(1) = -2$, $z(1) = 0$.

Решение. Сначала находим, что $y'(1) = 1$, $z'(1) = 2$. Затем получаем: $y'' = 1 + 2zz'$, $z'' = 2z' - y'$, откуда $y''(1) = 1$, $z''(1) = 3$. Далее аналогично определяем, что $y'''(1) = 8$, $z'''(1) = 5$. Значит,

$$y = -2 + (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{4}{3}(x-1)^3 + \ldots ,$$

$$z = 2(x-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2 + \frac{5}{6}(x-1)^3 + \ldots .$$

---

* См.: Виленкин Н. Я., Цукерман В. В. Ряды. — М.: Просвещение, 1982, с. 18.

4. Приближенное решение дифференциальных уравнений. Многие способы приближенного решения дифференциальных уравнений основаны на описанных выше методах доказательства теоремы существования и единственности. Например, указанный в п. 3 метод разложения решения в степенной ряд позволяет найти несколько первых членов ряда Тейлора для искомого решения, что дает хорошее приближение для этого решения вблизи точки x_0.

Пример 1. Найдем с точностью до 0,001 приближенное значение в точке 1,2 решения дифференциального уравнения $y' = x^2 + y^2$, удовлетворяющего начальному условию $y(1) = 0$.

Решение. Из равенства (5) п. 3 следует, что это значение является суммой ряда, первые члены которого имеют вид: $0{,}2 + 0,\ 2^2 + \frac{2}{3}\cdot 0{,}2^3 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}2^4$. Так как последнее слагаемое меньше чем 0,001, то искомое приближенное значение равно: $0{,}2 + 0{,}2^2 + \frac{2}{3}\cdot 0{,}2^3 \approx 0{,}246$.

Метод последовательных приближений тоже дает хороший способ приближенного решения уравнений.

Пример 2. Найдем первые два приближения к решению дифференциального уравнения $y' = x^2 + y^2$, удовлетворяющему начальному условию $y(1) = 0$.

Решение. Для данного уравнения равенство (2) п. 1 принимает вид:

$$y_{n+1}(x) = 0 + \int_1^x (t^2 + y_n^2(t))\,dt.$$

Перепишем это равенство, разложив t^2 по степеням $(t - 1)$:

$$y_{n+1}(x) = \int_1^x ((t-1)^2 + 2(t-1) + 1 + y_n^2(t))\,dt. \qquad (1)$$

Так как $y_0(t) = 0$, то имеем:

$$y_1(x) = \int_1^x ((t-1)^2 + 2(t-1) + 1)\,dt = \frac{(x-1)^3}{3} + (x-1)^2 + (x-1).$$

Далее получаем второе приближение:

$$y_2(x)=\int_1^x((t-1)^2+2(t-1)+1+y_1^2(t))\,dt=$$

$$=\frac{(x-1)^3}{3}+(x-1)^2+(x-1)+\int_1^x\left(\frac{(t-1)^3}{3}+(t-1)^2+\right.$$

$$\left.+(t-1)\right)^2dt=\frac{(x-1)^3}{3}+(x-1)^2+(x-1)+\int_1^x\left(\frac{(t-1)^6}{9}+\right.$$

$$\left.+\frac{2(t-1)^5}{3}+\frac{5}{3}(t-1)^4+2(t-1)^3+(t-1)^2\right)dt=$$

$$=\frac{2}{3}(x-1)^3+(x-1)^2+(x-1)+\frac{(x-1)^7}{63}+\frac{(x-1)^6}{9}+$$

$$+\frac{(x-1)^5}{3}+\frac{(x-1)^4}{2}.$$

Например,

$$y_2(1{,}2)=\frac{2}{3}\cdot 0{,}2^3+0{,}2^2+0{,}2+\frac{0{,}2^7}{63}+\frac{0{,}2^6}{9}+$$

$$+\frac{0{,}2^5}{3}+\frac{0{,}2^4}{2}\approx 0{,}2461.$$

Часто применяют методы приближенного решения дифференциального уравнения $y'=f(x, y)$, основанные на разбиении отрезка $[x_0;\ b]$ на части точками $x_0, x_1, \dots, x_n=b$ и последовательном отыскании приближенных значений $y_0, y_1, \dots, y_n$ искомого решения в этих точках. Например, после отыскания приближенного значения y_k для $y(x_k)$ заменяют на отрезке $[x_k;\ x_{k+1}]$ уравнение $y'=f(x, y)$ приближенно совпадающим с ним уравнением $y'=f(x_k, y_k)$. Решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(x_k)=y_k$, имеет вид: $y=y_k+f(x_k, y_k)(x-x_k)$. Подставляя сюда $x=x_{k+1}$, находим: $y_{k+1}=y_k+f(x_k, y_k)(x_{k+1}-x_k)$. Значение y_{k+1} будет приближенным значением решения в точке x_{k+1}. В частности, значение y_n дает искомое приближение для значения решения в точке b.

Разумеется, чем мельче отрезки деления, т. е. чем больше точек деления взято, тем точнее полученный результат. Однако увеличение числа точек разбиения влечет за собой увеличение вычислительной работы. Поэтому при решении важных практических задач — расчете траекторий ракет, работы ядерных реакторов и т. д. — применяют быстродействующие вычислительные машины, способные делать миллионы арифметических операций в секунду.

Если соединить ломаной точки $M_0(x_0; y_0)$, $M_1(x_1; y_1)$, ..., $M_n(x_n; y_n)$, полученные в ходе приближенного решения уравнения $y' = f(x, y)$, то она даст приближенное изображение интегральной кривой уравнения $y' = f(x, y)$, выходящей из точки $M_0(x_0; y_0)$. Поэтому описанный метод называют *методом ломаных*.

Пример 3. Найдем приближенное значение при $x = 0,5$ решения дифференциального уравнения $y' = xy$, удовлетворяющего начальному условию $y_0(1) = 1$.

Решение. Разобьем отрезок [0; 0,5] на 5 равных частей точками: $x_1 = 0,1$, $x_2 = 0,2$, $x_3 = 0,3$, $x_4 = 0,4$, положим $x_5 = 0,5$ и будем вычислять y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 по формуле $y_{k+1} = y_k + x_k y_k \cdot 0,1$.

Вычисления оформляем в виде следующей таблицы:

k	x_k	y_k	$f(x_k y_k) = x_k y_k$	$x_k y_k \cdot 0,1$
0	0	1	0	0
1	0,1	1,000	0,100	0,010
2	0,2	1,010	0,202	0,020
3	0,3	1,030	0,309	0,031
4	0,4	1,061	0,424	0,042
5	0,5	1,103		

Разделяя переменные в уравнении $y' = xy$ и интегрируя, находим его общее решение: $y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$. Частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$, имеет вид: $y = e^{\frac{x^2}{2}}$ и при $x = 0,5$ принимает значение 1,133. Видим, что приближенное значение решения в точке 0,5 равно 1,103, а точное значение равно 1,133.

Аналогичные численные методы применяются для приближенного решения систем дифференциальных уравнений.

Вопросы для самопроверки

1. Какими свойствами должна обладать функция $f(x, y)$ в прямоугольнике Ω: $x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a$, $y_0 - b \leqslant y \leqslant y_0 + b$, для того

чтобы через точку $M(x_0; y_0)$ проходила одна и только одна интегральная кривая уравнения $y' = f(x, y)$?

2. В чем заключается условие Липшица?

3. Каким уравнением заменяют дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ и начальное условие $y(x_0) = y_0$ для построения последовательных приближений?

4. Напишите формулу для нахождения последовательных приближений.

5. Сформулируйте теорему существования и единственности решения дифференциального уравнения n-го порядка, разрешенного относительно старшей производной.

6. Сформулируйте теорему существования и единственности для случая, когда функция $f(x, y)$ разлагается в степенной ряд.

7. Перечислите методы приближенного решения дифференциальных уравнений.

Упражнения

Докажите, что через любую точку плоскости проходит единственная интегральная кривая уравнения:

24. $y' = -2xy$. 25. $y' = y\sqrt{y} + x$.

26. $y' = x^3 + y^4$. 27. $y' = \sin y - x^2$.

Найдите области, в которых уравнение $y' = f(x, y)$ имеет единственное решение, если:

28. $f(x, y) = \sqrt[3]{(y + x)^2}$. 29. $f(x, y) = y + 3\sqrt[3]{y^2}$.

30. Найдите первые два приближения к решению дифференциального уравнения $y' = y^2 + 2x - 1$, удовлетворяющему начальному условию $y(0) = 1$.

31. Найдите первые пять приближений к решению дифференциального уравнения $y' = y$, удовлетворяющему начальному условию $y(0) = 1$. Сделайте предположение о виде n-го приближения и докажите его методом математической индукции. К какой функции стремятся эти приближения при $n \to \infty$?

32. Найдите три первых приближения к решению дифференциального уравнения $y' = -y + \cos x$, удовлетворяющему начальному условию $y(0) = \frac{1}{2}$. С помощью третьего приближения найдите значение решения при $x = 0{,}5$. Решите данное уравнение и сравните точный ответ с приближенным.

Для заданных уравнений постройте поле направлений и проведите приближенно интегральные кривые через указанные точки:

33. $y' = 2x - y$, $A(1; 2)$. 34. $y' = y - x$, $A(0; 1)$.

С помощью изоклин постройте приближенно интегральные кривые для следующих дифференциальных уравнений:

35. $y' = x(y - 1)$. 36. $y' = x + 1$.

37. $y' = \frac{1}{2}(x - 2y + 3)$. 38. $y' = x^2 + y$.

Найдите первые пять членов разложения в степенной ряд для решений следующих дифференциальных уравнений, удовлетворяющих указанным начальным условиям:

39. $y' = x + y^2$, $y(0) = 1$.

40. $y' = ye^x$, $y(0) = 0,1$.

41. Найдите значение $y(0,3)$, где y — решение дифференциального уравнения $y' = x + y^2$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$.

Найдите начальные условия, при которых для приведенных уравнений нарушаются условия теоремы существования и единственности решений дифференциальных уравнений:

42. $(5 - 2x)\,y'' + \dfrac{4}{1 - x^2}y'' - \dfrac{7}{x^2 - y^2} = 0$.

43. $y''' = \dfrac{8y'}{x^2 + y^2 - 16}$.

44. $y'' = \sqrt[3]{(y')^2}$.

§ 3. ОБЩЕЕ, ЧАСТНОЕ И ОСОБОЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

1. Общее и частное решения дифференциального уравнения. Мы пользовались в главе I понятиями общего и частного решений дифференциального уравнения, определения которых были сформулированы во введении. Однако, как указывалось во введении, эти определения не являются вполне строгими. Здесь мы уточним их.

Определение 1. Точка $M_0(x_0; y_0)$ называется *обыкновенной* для дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, если у нее есть прямоугольная окрестность Ω:

$$x_0 - l \leqslant x \leqslant x_0 + l,\quad y_0 - b \leqslant y \leqslant y_0 + b,$$

через каждую точку которой проходит единственное решение этого дифференциального уравнения, заданное на отрезке $[x_0 - l;\ x_0 + l]$.

Теорема. *Если в некоторой прямоугольной окрестности Ω_1 точки $M_0(x_0; y_0)$ непрерывны как функция f, так и ее частная производная f'_y, то M_0 является обыкновенной точкой для дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$.*

Доказательство. Пусть M — наибольшее значение $|f|$ в Ω_1, а L — наибольшее значение $|f'_y|$ в Ω_1, $2a$ и $2b$ — размеры окрестности Ω_1 (рис. 18). Тогда (см. п. 1 § 2) через точку M_0 проходит единственное решение дифференциального уравнения, заданное на отрезке

$$[x_0 - l_1;\ x_0 + l_1],\ \text{где}\ l_1 = \min\left(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{2L}\right).$$

Легко проверить, что утверждение остается верным, если уменьшить вдвое как число b, так и значение l_1. Обозначим через Ω_2 прямоугольную окрестность точки M_0, заданную неравенствами:

$$x_0 - \frac{l_1}{4} \leqslant x \leqslant x_0 + \frac{l_1}{4},$$

$$y_0 - \frac{b}{2} \leqslant y \leqslant y_0 + \frac{b}{2}.$$

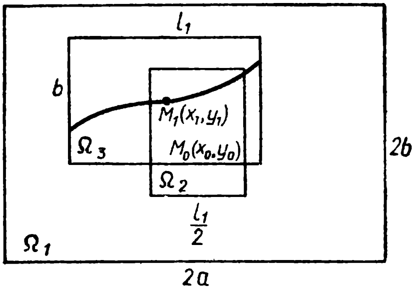

Рис. 18

Она целиком лежит в Ω_1, и потому для любой точки M_1 $(x_1;\ y_1)$ этой окрестности существует единственное решение данного дифференциального уравнения, заданное на отрезке $\left[x_1 - \frac{l_1}{2};\ x_1 + \frac{l_1}{2}\right]$, график которого лежит в окрестности Ω_3:

$$x_1 - \frac{l_1}{2} \leqslant x \leqslant x_1 + \frac{l_1}{2}, \quad y_1 - \frac{b}{2} \leqslant y \leqslant y_1 + \frac{b}{2} \text{ точки } M_1.$$

Эта окрестность также лежит в Ω_1, причем отрезок $\left[x_1 - \frac{l_1}{2};\ x_1 + \frac{l_2}{2}\right]$ содержит отрезок $\left[x_0 - \frac{l_1}{4};\ x_0 + \frac{l_1}{4}\right]$. Значит, через каждую точку окрестности Ω_2 проходит единственное решение уравнения $y' = f(x,\ y)$, определенное на отрезке $\left[x_0 - \frac{l_1}{4};\ x_0 + \frac{l_1}{4}\right]$. Теорема доказана.

Линии разрыва графиков функций f и f'_y (если они существуют) разделяют плоскость на части, внутри каждой из которых эти функции непрерывны, а потому внутренние точки этих частей являются обыкновенными для дифференциального уравнения $y' = f\ (x,\ y)$.

Пример 1. Для уравнения $y' = y^{\frac{2}{3}}$ функция $f(x, y) = y^{\frac{2}{3}}$ непрерывна, а функция $f'_y = \frac{2}{3} y^{-\frac{1}{3}}$ разрывна на оси абсцисс. Эта линия разрыва делит плоскость на две части — нижнюю и верхнюю, причем все точки, лежащие выше оси абсцисс, равно как и все точки, лежащие ниже нее, обыкновенные.

Определение 2. Пусть Ω — одна из связных областей, на которые линии разрыва функции f и f'_y делят плоскость. Функция $y = \varphi(x, C)$ называется *общим решением* дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ в области Ω, если:

а) при любом значении C функция $y = \varphi(x, C)$ удовлетворяет этому уравнению и ее график лежит в области Ω;

б) для любой точки $M_0(x_0; y_0)$ области Ω найдется такое значение C_0, что $\varphi(x_0, C_0) = y_0$, т. е. решение $y = \varphi(x, C_0)$ удовлетворяет начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Определение 3. Пусть $y = \varphi(x, C)$ — общее решение уравнения $y' = f(x, y)$ в области Ω_1 и C_0 — число. Функция $y = \varphi(x, C_0)$ называется *частным решением* уравнения.

В качестве произвольной постоянной C_0 может быть выбрана ордината y_0 этого решения при фиксированном значении аргумента.

Если $y = \varphi(x, C)$ — общее решение уравнения $y' = f(x, y)$ в области Ω_1, то эта область расслаивается на графики функций $y = \varphi(x, C)$, соответствующих всевозможным значениям C.

Пример 2. Верхняя и нижняя полуплоскости (рис. 19, *а*) расслаиваются на графики функций $y = \left(\frac{x+C}{3}\right)^3$, $x \geqslant -C$ и $y = \left(\frac{x+C}{3}\right)^3$, $x \leqslant -C$, соответственно являющихся решениями уравнения $y' = y^{\frac{2}{3}}$ в этих полуплоскостях. Через каждую точку полуплоскостей проходит единственный график этих функций.

Заметим, что для всей плоскости нельзя сказать, что через каждую ее точку проходит единственное решение уравнения $y' = y^{\frac{2}{3}}$ — наряду с графиком функции $y = \left(\frac{x+C}{3}\right)^3$ через эту точку проходят графики бесчисленного множества решений, один из которых показан на рисунке 19, *б*.

Аналогично определяются понятия общего и частного решений систем дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений высшего порядка. Общее решение системы дифференциальных уравнений $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$, где

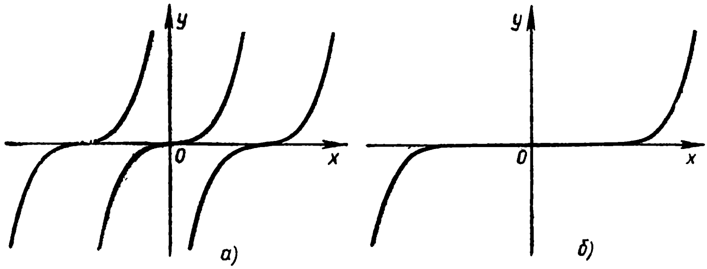

Рис. 19

$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, имеет вид: $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\varphi}(x, \boldsymbol{C})$, где $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, $\boldsymbol{C} = (C_1, C_2, \ldots, C_n)$. Общее решение дифференциального уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ имеет вид: $y = \varphi(x, C)$, где $C = (C_1, C_2, \ldots, C_n)$. Придавая произвольным постоянным $C_1, C_2, \ldots, C_n$ фиксированные значения, получаем частные решения.

2. Особые точки и особые решения дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$. Если в точке $M_0(x_0; y_0)$ хотя бы одна из функций f и f'_y имеет разрыв, то возможны следующие случаи:

а) В точке M_0 функция $f(x, y)$ бесконечно велика, $\lim\limits_{x \to x_0,\ y \to y_0} f(x, y) = \infty$.

В этом случае поле направлений в точке M_0 параллельно оси ординат, и потому касательная в точке M_0 к интегральной кривой, проходящей через эту точку, вертикальна.

Пример 1. Для уравнения $y' = \dfrac{1}{x - y}$ поле направлено вертикально в точках прямой $x - y = 0$.

б) Функция $f(x, y)$ непрерывна в некоторой проколотой окрестности точки $M(x_0; y_0)$, но не имеет предела при $M \to M_0$ (т. е. при $x \to x_0$, $y \to y_0$).

В этом случае в сколь угодно малой окрестности точки M_0 поле может иметь весьма отличающиеся друг от друга направления. В п. 3 § 1 такие точки были названы особыми для поля направлений. Через особые точки либо не проходит ни одна интегральная кривая данного уравнения, либо проходит бесконечно много таких кривых.

в) Функция $f(x, y)$ непрерывна в некоторой окрестности точки M_0, но частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ этой функции обращается в бесконечность на некоторой линии Г, проходящей через точку M_0.

В этом случае в каждой точке линии Γ не выполняются условия теоремы существования и единственности решения уравнения $y' = f(x, y)$.

Определение. Решение дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ называется *особым*, если через каждую точку соответствующей интегральной кривой проходит, по крайней мере, еще одна интегральная кривая того же уравнения. График этого решения называется *особой интегральной кривой*.

Пример 1. Функция $y = 0$ является особым решением уравнения $y' = y^{\frac{2}{3}}$. В самом деле, она является решением этого уравнения, а через точку $M(x_0; 0)$ этой линии проходит еще график решения $y = \left(\frac{x - x_0}{3}\right)^3$ того же уравнения.

Пример 2. Хотя на оси абсцисс частная производная $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{3} y^{-\frac{1}{3}}$ функции $y^{\frac{2}{3}} + x$ обращается в бесконечность, функция $y = 0$ не является особым решением уравнения $y' = y^{\frac{2}{3}} + x$, так как она не удовлетворяет этому уравнению.

Остановимся теперь на случае, когда дифференциальное уравнение не разрешено относительно производной, т. е. имеет вид:

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1}$$

При заданных $x = x_0$ и $y = y_0$ это уравнение может удовлетворяться несколькими значениями y', и потому через точку $M(x_0; y_0)$ может проходить несколько интегральных кривых в разных направлениях. Это не противоречит теореме существования и единственности, поскольку она касается лишь уравнений, разрешенных относительно производных. Если $F(x_0, y_0, y'_0) = 0$, причем $F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'} \neq$ $\neq 0$ в точке $N(x_0; y_0; y'_0)$, то в окрестности точки N уравнение (1) можно решить относительно $y' : y' = f(x, y)$. При этом по правилу дифференцирования неявной функции имеем:

$$f'_y = -\frac{F'_y}{F'_{y'}}.$$

Отсюда вытекает, что условия теоремы существования и единственности нарушаются лишь в точках, где $F'_{y'}=0$. Итак, мы доказали следующую теорему:

Теорема. *Если φ — особое решение дифференциального уравнения $F(x, y, y')=0$, то оно удовлетворяет, кроме того, и уравнению $F'_{y'}(x, y, y')=0$.*

Из этой теоремы вытекает, что особые решения дифференциального уравнения $F(x, y, y')=0$ можно искать следующим образом:

а) исключаем y' из системы уравнений:

$$\begin{cases} F(x, y, y')=0, \\ F'_{y'}(x, y, y')=0; \end{cases} \tag{2}$$

б) проверяем, какие части получившейся кривой являются интегральными кривыми для данного уравнения.

Замечание. При исключении y' из системы уравнений (2), кроме интегральных кривых, получаются линии, состоящие из особых точек интегральных кривых уравнения (1), т. е. из точек, в которых нельзя провести единственную касательную к этим кривым.

Пример 3. Найдем особое решение уравнения

$$(y')^2+y^2-1=0.$$

Решение. Здесь $F(x, y, y')=(y')^2+y^2-1$, $F_{y'}=2y'$, и система (2) принимает вид:

$$\begin{cases} (y')^2+y^2-1=0, \\ 2y'=0. \end{cases}$$

Подставив значение $y'=0$ в первое уравнение, получим: $y^2=1$. Значит, $y=\pm 1$. Проверка показывает, что функции $y=1$, $y=-1$ — решения данного уравнения, т. е. его особые решения.

Пример 4. Найдем особое решение дифференциального уравнения

$$x-y=\frac{4}{9}(y')^2-\frac{8}{27}(y')^3. \tag{3}$$

Решение. В данном случае система (2) принимает вид:

$$\begin{cases} x-y=\frac{4}{9}(y')^2-\frac{8}{27}(y')^3, \\ \frac{8}{9}y'-\frac{8}{9}(y')^2=0. \end{cases} \tag{4}$$

Из второго уравнения находим, что $y' = 0$ или $y' = 1$. В первом случае из первого уравнения системы (4) находим, что $x - y = 0$, а во втором, что $x - y = \frac{4}{27}$. Но лишь $x - y = \frac{4}{27}$ дает решение уравнения (3). Линия же $x - y = 0$ оказывается множеством точек заострения интегральных кривых (рис. 20), но не является интегральной кривой данного уравнения.

3. Огибающая семейства плоских кривых. Рассмотрим семейство линий, заданное уравнением

$$\Phi(x, y, C) = 0, \tag{1}$$

где C — параметр и функция Φ непрерывна и имеет непрерывные производные Φ'_x, Φ'_y, Φ'_C. Это множество называют *семейством*, зависящим от одного параметра.

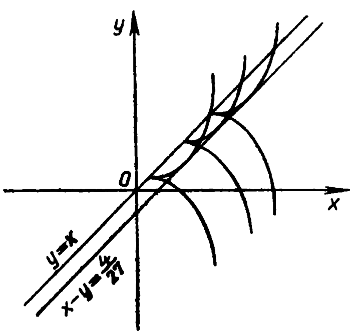

Рис. 20

О п р е д е л е н и е. Гладкая кривая Г: $x = \varphi(C)$, $y = \psi(C)$, где функции φ' и ψ' непрерывны и $(\varphi')^2 + (\psi')^2 \neq 0$, называется *огибающей семейства плоских кривых*, если в каждой своей точке $M(\varphi(C); \psi(C))$ она касается кривой семейства, соответствующей значению параметра C, и отлична от нее в любой окрестности этой точки (рис. 21).

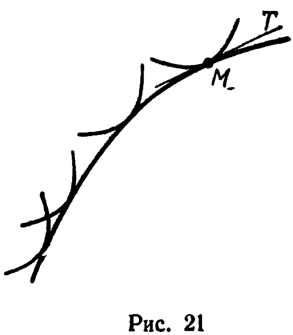

Рис. 21

Т е о р е м а. *Если кривая* Г, *заданная уравнениями*

$$\begin{cases} x = \varphi(C), \\ y = \psi(C), \end{cases} \tag{2}$$

— *огибающая семейства кривых* (1), *то функции*

$x = \varphi(C)$, $y = \psi(C)$ *удовлетворяют системе уравнений:*

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0, \\ \Phi'_C(x, y, C) = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Доказательство. По определению огибающая кривая семейства (1), которая соответствует некоторому значению параметра C, проходит через точку $M(\varphi(C); \psi(C))$ огибающей и касается ее в этой точке. Это означает, что при допустимом значении параметра C справедливо равенство

$$\Phi(\varphi(C), \psi(C), C) = 0. \qquad (4)$$

Далее, огибающая в каждой своей точке M имеет общую касательную с кривой семейства, проходящей через точку M. Поэтому угловой коэффициент $-\dfrac{\Phi'_x(\varphi(C), \psi(C), C)}{\Phi'_y(\varphi(C), \psi(C), C)}$ касательной к огибающей в точке M равен угловому коэффициенту $\dfrac{\psi'(C)}{\varphi'(C)}$ касательной к соответствующей кривой семейства в той же точке, т. е. справедливо равенство

$$\frac{\psi'(C)}{\varphi'(C)} = -\frac{\Phi'_x(\varphi(C), \psi(C), C)}{\Phi'_y(\varphi(C), \psi(C), C)}. \qquad (5)$$

Перепишем равенство (5) в виде

$$\Phi'_x(\varphi(C), \psi(C), C)\,\varphi'(C) + \Phi'_y(\varphi(C), \psi(C), C)\,\psi'(C) = 0. \qquad (6)$$

Дифференцируя (4) по C, получим:

$$\Phi'_x(\varphi(C), \psi(C), C)\,\varphi'(C) + \Phi'_y(\varphi(C), \psi(C), C)\,\psi'(C) + \Phi'_C(\varphi(C), \psi(C), C) = 0. \qquad (7)$$

В силу (6) равенство (7) принимает вид:

$$\Phi'_C(\varphi(C), \psi(C), C) = 0. \qquad (8)$$

Равенства (4) и (8) показывают, что функции $x = \varphi(C)$, $y = \psi(C)$ удовлетворяют системе уравнений (3).

Теорема доказана.

Замечание. Мы доказали, что огибающая семейства кривых удовлетворяет системе уравнений (3). Но не всякая кривая, удовлетворяющая этой системе уравнений, является огибающей. Решив систему уравнений (3) относительно x и y, мы найдем так называемую дискриминантную кривую, которая (или ее ветвь) может и не быть огибающей. Поэтому, найдя дискриминантную кривую, проверяют, будет ли она (ее ветвь) огибающей.

Пример. Найдем огибающую семейства полукубических парабол:

$$3(y-C)^2-2(x-C)^3=0.$$

Решение. Здесь $\Phi(x, y, C)=3(y-C)^2-2(x-C)^3$, $\Phi'_C=-6(y-C)+6(x-C)^2$.
Система (3) принимает вид:

$$\begin{cases} 3(y-C)^2-2(x-C)^3=0, \\ y-C-(x-C)^2=0. \end{cases}$$

Решим ее относительно $x-C$ и $y-C$ и исключим C. Получим: 1) $x-C=0$, $y-C=0$, откуда $y=x$;

2) $x-C=\frac{2}{3}$, $y-C=\frac{4}{9}$, откуда $y=x-\frac{2}{9}$.

Следовательно, дискриминантная кривая распадается на пару прямых: $y=x$ и $y=x-\frac{2}{9}$. Только вторая прямая является огибающей, ибо только для точек этой прямой $x=C+\frac{2}{3}$, $y=C+\frac{4}{9}$ выполняется равенство (5). В самом деле,

$$\frac{\psi'(C)}{\varphi'(C)}=1, \quad -\frac{\Phi'_x(\varphi(C), \psi(C), C)}{\Phi'_y(\varphi(C), \psi(C), C)}=\frac{6(x-C)^2}{6(y-C)}=\frac{6\left(\frac{2}{3}\right)^2}{6\left(\frac{4}{9}\right)}=1.$$

Для первой же прямой имеем: $\frac{\psi'(C)}{\varphi'(C)}=1$, $\Phi'_x=\Phi'_y=0$, и потому равенство (5) смысла не имеет.

Если $\Phi(x, y, C)=0$ — семейство интегральных кривых для дифференциального уравнения $F(x, y, y')=0$, то огибающая этого семейства также будет интегральной кривой для этого уравнения. В самом деле, по определению огибающей в каждой ее точке касательная к огибающей совпадает с касательной соответствующей интегральной кривой данного семейства, а потому эта огибающая, как и соответствующая интегральная кривая, касается поля направлений.

Поскольку через каждую точку огибающей проходят по меньшей мере два решения данного уравнения, то она является особой интегральной кривой. Отсюда для отыскания особых решений по уже найденному общему решению $\Phi(x, y, C) = 0$ надо найти огибающую данного семейства кривых. В соответствии со сказанным выше для этого нужно исключить C из системы уравнений

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0, \\ \Phi'_C(x, y, C) = 0 \end{cases}$$

и проверить, какие части получившейся кривой являются интегральными кривыми для уравнения $F(x, y, y') = 0$.

4. Уравнение Клеро. Найдем дифференциальное уравнение для семейства прямых:

$$y = Cx + \varphi(C). \tag{1}$$

Дифференцируя обе части (1) по x, получаем, что $y' = C$, и потому в силу (1) имеем искомое дифференциальное уравнение

$$y = xy' + \varphi(y'). \tag{2}$$

Это уравнение называется *уравнением Клеро*. Общее решение этого уравнения имеет вид: $y = Cx + \varphi(C)$.

Уравнение (2) имеет еще особое решение. Оно получается следующим образом. Продифференцируем обе части равенства (1) по C: $0 = x + \varphi'(C)$, после чего исключим C из системы уравнений:

$$\begin{cases} y = Cx + \varphi(C), \\ 0 = x + \varphi'(C). \end{cases} \tag{3}$$

Так как прямые не имеют особых точек, получаем особое решение.

Чтобы исключить C, надо решить уравнение $0 = x + \varphi'(C)$ относительно C и подставить полученное значение в первое уравнение системы (3). Но можно считать, что (3) является параметрическим уравнением огибающей (с параметром C). Таким образом, (3) — параметрическое задание особого решения уравнения Клеро.

Пример 1. Найдем все решения уравнения Клеро:

$$y = xy' - (y')^2.$$

Решение. Это уравнение Клеро, в котором $\varphi(y') =$

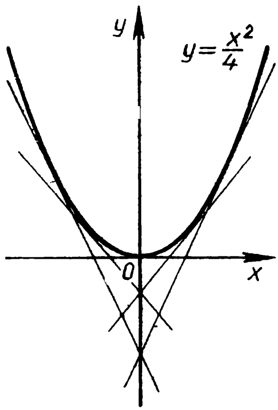

Рис. 22

$= -(y')^2$. Его общее решение получим, заменив в нем y' на C:

$$y = Cx - C^2. \qquad (4)$$

Найдем теперь особое решение, которым является огибающая полученного семейства прямых:

$$\begin{cases} y = Cx - C^2, \\ 0 = x - 2C. \end{cases}$$

Исключив C, получим: $y = \frac{x^2}{4}$ (рис. 22).

Следовательно, особое решение представляет параболу, в то время как ее общее решение (4) есть семейство прямых. Парабола, являясь огибающей, в каждой своей точке касается одной из прямых, входящих в семейство (4).

Пример 2. Найдем кривую, каждая касательная к которой образует с осями координат треугольник постоянной площади, равной S.

Решение. Пусть касательная отсекает на осях координат Ox и Oy отрезки длиной a и b. Напишем уравнение касательной в отрезках: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Но по условию $ab = 2S$, откуда $b = \frac{2S}{a}$. Мы получили однопараметрическое семейство непараллельных прямых: $\frac{x}{a} + \frac{ay}{2S} = 1$. Найдем дифференциальное уравнение этого семейства. Для этого продифференцируем его по x и исключим a из системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{ay}{2S} = 1, \\ \frac{1}{a} + \frac{ay'}{2S} = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения имеем: $a^2 = -\frac{2S}{y'}$, $a = \sqrt{-\frac{2S}{y'}}$.

Подставив значение a в первое уравнение, получим:

$$\frac{x\sqrt{-y'}}{\sqrt{2S}} + \frac{y}{\sqrt{2S}\sqrt{-y'}} = 1,$$

или $y = xy' + \sqrt{2S}\sqrt{-y'}$. Это уравнение Клеро; его общее решение $y = Cx + \sqrt{2S}\sqrt{-C}$. Нас интересует особое решение, которое дает искомую кривую. Найдем его:

$$\begin{cases} 0 = x - \dfrac{\sqrt{2S}}{2\sqrt{-C}}, \\ y = Cx + \sqrt{2S}\sqrt{-C}. \end{cases}$$

Из первого уравнения имеем: $\sqrt{-C} = \frac{\sqrt{2S}}{2x}$, или $C = -\frac{S}{2x^2}$. Подставив значения C и $\sqrt{-C}$ во второе уравнение, получим $y = -\frac{S}{2x} + \frac{S}{x}$, или $xy = \frac{S}{2}$. Это равносторонняя гипербола.

Вопросы для самопроверки

1. Какое решение дифференциального уравнения называется общим? В чем его геометрический смысл?
2. Какое решение дифференциального уравнения называется частным решением? В чем его геометрический смысл?
3. Какое множество плоских кривых называется семейством, зависящим от одного параметра?
4. Какая кривая называется огибающей семейства плоских кривых?
5. Какое решение уравнения $F(x, y, y') = 0$ называется особым?
6. Какая кривая называется особой интегральной кривой?
7. Из какой системы уравнений может быть найдено особое решение уравнения $F(x, y, y') = 0$?
8. Почему огибающая семейства частных решений является особым решением уравнения?
9. Какое уравнение называется уравнением Клеро?
10. Семейство каких линий представляет общее решение уравнения Клеро?
11. Что геометрически представляет особое решение уравнения Клеро? Как найти его?

Упражнения

По общим решениям дифференциальных уравнений найдите их частные решения, удовлетворяющие начальным условиям (изобразите на чертеже найденные решения):

45. $y = Cx^2$, $y(2) = 4$.

46. $x^2 + 2y^2 = C$, $y(-1) = 5$.

47. $xy = C$, $y(3) = 2$.

48. $y = C\cos x$, $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$.

49. Пусть $y = \varphi(x)$ — частное решение дифференциального уравнения $y' = y\cos(x - 1) + \ln x$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(1) = 3$. Найдите при $x = 1$ производные первого и второго порядка этого частного решения.

50. Пусть $y = \varphi(x)$ — частное решение дифференциального уравнения $y' = x^3 y + e^{2x}$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0) = 1$. Найдите при $x = 0$ производные третьего и четвертого порядка этого частного решения.

51. Убедитесь, что функция $y = -2\sqrt{1 - x^2} + C$, $C \in R$, является общим решением уравнения $y' = \frac{2x}{\sqrt{1 - x^2}}$, $|x| < 1$, и найдите частное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$. Можно ли задать начальное условие $y(2) = 1$?

Найдите общее решение дифференциальных уравнений и выделите интегральные кривые, проходящие через указанные точки:

52. $y' = -6x^2$, $M_1(0; 0)$, $M_2(0; 4)$.

53. $y' = -\frac{1}{y^2}$, $y \neq 0$, $M(1; 4)$.

54. $y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $M_1(4; 0)$, $M_2(1; 1)$.

55. $y' = |2x + 1|$, $M_1(1; 5)$, $M_2(-1; 1)$.

56. $y' = 2\cos 2x$, $M_1(0; 1)$, $M_2(0; 0)$.

57. $y' = 4\cos^2 x$, $M_1\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$, $M_2(0; 2)$.

Укажите области, в которых выполняются условия теоремы Коши:

58. $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$.

59. $y' = x^2 y + 7y^2$.

60. $y' = x^3 \cos 2y$.

61. $y' = xy + 10\sin 5y$.

Покажите, что нижеприведенные функции являются общими решениями соответствующих дифференциальных уравнений:

62. $y = C_1 \sin 5x + C_2 \cos 5x$, $y'' + 25y = 0$.

63. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$, $y'' - y' - 2y = 0$.

64. $y = C_1 x + C_2 x^2$, $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x}y = 0$, $x \neq 0$.

65. $y = C_1 x + C_2 e^x$, $(1 - x)y'' + xy' - y = 0$.

66. $y = (C_1 + C_2 x)\cos 2x + (C_3 + C_4 x)\sin 2x$, $y^{IV} + 8y'' + 16y = 0$.

67. Даны дифференциальное уравнение $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$ и его решение $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}$, где C_1, C_2, C_3—произвольные постоянные.

а) Проверьте, что это решение является общим.

б) Найдите частное решение, удовлетворяющее следующим начальным условиям: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$.

Найдите огибающую семейства линий:

68. $y = 2Cx - C^2$.

69. $(x - C)^2 + (y - C)^2 = C^2$.

70. $y = Cx + \frac{1}{C}$.

71. $Cx - y = \sqrt{1 + C^2}$.

72. $x + y = (x + C)^2$.

73. $y + y(x + C)^2 = 1$.

Найдите особые решения дифференциальных уравнений, если известны их общие интегралы:

74. $8(y')^2 = 27y$, $y^2 = (x + C)^3$.

75. $(y' + 1)^3 = 27(x + y)^2$, $x + y = (x + C)^3$.

76. $y^2((y')^2 + 1) = 1$, $(x + C)^2 + y^2 = 1$.

77. $(y')^2 - 4y^3 = 0$, $y(x + C)^2 = 1$.

78. $(y')^2 = 4y^3(1 - y)$, $y(1 + (x - C)^2) = 1$.

Найдите общие и особые решения дифференциальных уравнений:

79. $y = xy' + \frac{1}{y'}$.

80. $y(y')^2 = 1$.

81. $x(y')^2 - 2yy' + 4x = 0$.

82. $(y')^2 - \frac{2y}{x}y' + 1 = 0$.

Являются ли уравнениями Клеро следующие уравнения

83. $2y = xy' + y' \ln y'$.

84. $y = 2xy' + \ln y'$.

85. $y = xy' + \sin y'$.

86. $y = 2xy' + \cos y'$?

Проинтегрируйте уравнения:

87. $y = xy' + (y')^2$.

88. $y = xy' + \frac{2}{(y')^2}$.

89. $y = xy' - a\sqrt{1 + (y')^2}$, $a > 0$.

90. $y = xy' + y' \ln y'$.

91. $y = xy' + \sqrt{2y'}$.

92. $y = xy' - \frac{1}{4}(y')^4$.

93. Найдите кривую, каждая касательная к которой отсекает на осях координат отрезки, сумма длин которых равна $2a$.

94. Найдите кривые, для которых сумма координат точек пересечения касательной с осями координат в два раза больше суммы координат точек касания.

Глава III

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

§ 1. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

1. Линеаризация уравнений и систем уравнений. Во многих практических задачах как сами изучаемые функции, так и их производные принимают настолько малые значения, что их квадратами, кубами и т. д. можно пренебречь. Это позволяет заменить произвольные зависимости между величинами линейными зависимостями. Применяя указанную операцию *линеаризации* к правым частям дифференциальных уравнений, описывающих соответствующий процесс, получаем дифференциальное уравнение, в которое как сами искомые функции, так и их производные входят линейно. Такие уравнения называются *линейными* уравнениями.

Определение. Дифференциальное уравнение n-го порядка с искомой функцией y называется *линейным*, если искомая функция и ее производные входят в него линейно.

Общий вид дифференциального уравнения n-го порядка таков:

$$a_0(x)\,y^{(n)}+a_1(x)\,y^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)\,y=b(x). \qquad (1)$$

Здесь $a_k(x)$, $0\leqslant k\leqslant n$, $b(x)$ — функции, непрерывные на некотором промежутке X. Если на этом промежутке коэффициент $a_0(x)$ отличен от нуля, то уравнение (1) можно заменить уравнением

$$y^{(n)}+p_1(x)\,y^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)\,y=q(x), \qquad (2)$$

где для краткости положено $p_k(x)=\dfrac{a_k(x)}{a_0(x)}$, $1\leqslant k\leqslant n$, $q(x)=\dfrac{b(x)}{a_0(x)}$.

Уравнения вида (2) называют *приведенными*. Функцию $b(x)$ называют *свободным членом* уравнения (1). Если она тождественно равна нулю, то уравнение (1) называют *однородным линейным дифференциальным уравнением n-го порядка*. В противном случае это уравнение называют *неоднородным*. Например, $y'' - y' \sin x - y \operatorname{tg} x = \cos x$ — неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка, а $y'' - y' \sin x - y \operatorname{tg} x = 0$.— соответствующее ему однородное линейное дифференциальное уравнение (также имеющее второй порядок).

Систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка с n искомыми функциями в развернутом виде записывают так:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x) y_1 + \ldots + a_{1n}(x) y_n + b_1(x), \\ y_2' = a_{21}(x) y_2 + \ldots + a_{2n}(x) y_n + b_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_{n1}(x) y_1 + \ldots + a_{nn}(x) y_n + b_n(x). \end{cases} \tag{3}$$

Обозначим вектор-столбец с элементами y_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ через $\boldsymbol{y}$, вектор-столбец с элементами $b_k(x)$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ через $\boldsymbol{b}(x)$, а матрицу с элементами $a_{ij}(x)$ через $\boldsymbol{A}(x)$:

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \ldots & a_{1n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}(x) & \ldots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}.$$

Тогда система (3) запишется так:

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(x). \tag{3'}$$

Теория линейных дифференциальных уравнений и систем таких уравнений является важной областью математического анализа.

2. Теорема существования и единственности решения линейных дифференциальных уравнений высшего порядка и систем линейных дифференциальных уравнений. Ради простоты изложения ограничимся в этом пункте рассмотрением линейных дифференциальных уравнений второго порядка —общий случай мало отличается от этого частного случая. Для линейных дифференциальных уравнений справедлива следующая теорема, уточняющая теорему существования и единственности, сформулированную в п. 2, § 2, главы II*.

---

* Уточнение состоит в том, что решение φ существует не только в некоторой окрестности $[x_0 - h;\ x_0 + h]$ точки x_0, но и на всем отрезке $[c;\ d]$.

Теорема. *Пусть функции* $p_1(x)$, $p_2(x)$, $q(x)$ *непрерывны на отрезке* $[c; d]$. *Тогда для любой точки* x_0 *этого отрезка и любых чисел* C_0, C_1 *существует единственное решение* φ *приведенного линейного дифференциального уравнения*

$$y'' + p_1(x)\, y' + p_2(x)\, y = q(x), \tag{1}$$

заданное на всем отрезке $[c; d]$ *и удовлетворяющее начальным условиям*: $\varphi(x_0) = C_0$, $\varphi'(x_0) = C_1$.

Доказательство. Уравнение (1) запишем в виде

$$y'' = -p_1(x)\, y' - p_2(x)\, y + q(x).$$

Тогда для него имеем: $f(x, y, y') = -p_1(x)\, y' - p_2(x)\, y + q(x)$. Значит, $\frac{\partial f}{\partial y} = -p_2(x)$, $\frac{\partial f}{\partial y'} = -p_1(x)$. По условию теоремы эти функции непрерывны, а потому ограничены на $[c; d]$. Ограничена на $[c; d]$ и функция $q(x)$. Поэтому существует такое число L, что на $[c; d]$ выполняются неравенства:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = |p_2(x)| \leqslant L, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y'}\right| = |p_1(x)| \leqslant L,$$
$$|q(x)| \leqslant L.$$

Тем самым выполнено условие ограниченности частных производных из теоремы 1 п. 2, § 2, главы II.

Обозначим через Ω прямоугольный параллелепипед в трехмерном пространстве с координатами x, y, y', заданный неравенствами:

$$x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a, \quad C_0 - b \leqslant y \leqslant C_0 + b,$$
$$C_1 - b \leqslant y' \leqslant C_1 + b,$$

где $[x_0 - a; x_0 + a] \subset [c; d]$.

В этом параллелепипеде имеем: $|y - C_0| \leqslant b$, и потому

$$|y| = |C_0 + y - C_0| \leqslant |C_0| + |y - C_0| \leqslant |C_0| + b.$$

Аналогично имеем: $|y'| \leqslant |C_1| + b$. Но тогда в этом параллелепипеде имеем:

$$|f(x, y, y')| = |-p_1(x)\, y' - p_2(x)\, y + q(x)| \leqslant$$
$$\leqslant |p_1(x)|\, |y'| + |p_2(x)|\, |y| + |q(x)| \leqslant L(|C_1| + b) +$$
$$+ L(|C_0| + b) + L = L(|C_0| + |C_1| + 2b + 1).$$

Правую часть этого неравенства обозначим M. Тогда имеем в Ω неравенство $|f(x, y, y')| \leqslant M$. При этом имеем:

$$\frac{b}{M} = \frac{b}{L(|C_0| + |C_1| + 2b + 1)} = \frac{1}{L\left(\frac{\alpha}{b} + 2\right)},$$

где для краткости положено $\alpha = |C_0| + |C_1| + 1$.

При достаточно больших значениях b имеем: $\left|\frac{\alpha}{b}\right| < 1$, и потому $\left|\frac{\alpha}{b} + 2\right| > 1$, откуда $\frac{b}{M} < \frac{1}{L}$.

Аналогично доказывается, что для достаточно больших значений b выполняется неравенство

$$\frac{b}{b + |C_0|} = \frac{1}{1 + \frac{|C_0|}{b}} > \frac{1}{2}.$$

Поскольку в теореме 1 п. 2, § 2, главы II в качестве l выбиралось наименьшее из чисел a, $\frac{b}{M}$, $\frac{b}{b + |C_0|}$, $\frac{1}{2(L + 1)}$, то видим, что значение l можно выбрать не зависящим ни от выбора x_0, ни от выбора чисел C_0, C_1; например, можно положить $l = \min\left(a, \frac{1}{2(L + 1)}, \frac{1}{2}\right)$.

Из теоремы 1 п. 2, § 2, главы II вытекает, что искомое решение существует на отрезке $[x_0 - l; x_0 + l]$. Примем значение этого решения и его производной в точке $x_0 + l$ за начальные условия в этой точке для решения на отрезке $[x_0 + l; x_0 + 2l]$. Значения же решения и его производной в точке $x_0 - l$ примем за начальные условия в этой точке для отрезка $[x_0 - 2l; x_0 - l]$. Продолжая этот процесс, через конечное число шагов получаем решение, заданное на всем отрезке $[c; d]$.

Пример 1. Коэффициенты уравнения

$$y'' + \sqrt{x - y}\, y' + x^2 y = e^x \tag{1}$$

непрерывны на луче $[4; +\infty[$. Значит, на этом луче для уравнения (1) справедлива теорема существования и единственности решения линейных дифференциальных уравнений высшего порядка.

Для линейного дифференциального уравнения n-го порядка

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)\, y = q(x)$$

следует потребовать непрерывности на $[c;\ d]$ функций $p_1(x), \ldots, p_n(x), q(x)$.

Аналогичная теорема справедлива для системы линейных дифференциальных уравнений. Как было отмечено выше, такая система имеет вид: $\boldsymbol{y}' = A(x)\,\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(x)$, где $A(x)$ — матрица с элементами $a_{ij}(x)$, $\boldsymbol{y}$ — вектор с координатами $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ и $\boldsymbol{b}(x)$ — вектор с координатами $b_1(x), \ldots, b_n(x)$. Теорема существования и единственности имеет место на отрезке $[c;\ d]$ при любом выборе точки x_0 этого отрезка и значений $y_0, \ldots, y_0^{n-1}$, если на $[c;\ d]$ непрерывны все элементы a_{ij} матрицы A и все координаты $b_k(x)$ вектора $\boldsymbol{b}(x)$.

Поскольку постоянные являются непрерывными функциями, то сформулированные в этом пункте утверждения верны для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, т. е. для уравнений вида

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y = q(x),$$

где $p_1, \ldots, p_n$ — числа.

3. Линейные дифференциальные операторы и их свойства.

Определение 1. *Оператором* называют отображение L, ставящее в соответствие каждой функции φ из некоторого множества другую функцию ψ: $L[\varphi] = \psi$.

Пример 1. Оператор умножения на функцию g ставит в соответствие каждой функции φ функцию $g\varphi$. Если, скажем, $g(x) = \sin x$, $\varphi(x) = e^x$, то значение функции $L[\varphi]$ в точке x равно $\sin x \cdot e^x$. Оператор умножения на функцию g обозначают просто g.

Пример 2. Оператор дифференцирования D на промежутке X ставит в соответствие каждой функции φ, дифференцируемой на этом промежутке*, ее производную (рассматриваемую на том же промежутке): $D[\varphi] = \varphi'$.

Определение 2. *Суммой операторов* L_1 и L_2 называют оператор L такой, что $L[\varphi] = L_1[\varphi] + L_2[\varphi]$. Его обозначают $L_1 + L_2$.

Определение 3. *Произведением операторов* L_1

---

* В дальнейшем мы не будем особо оговаривать применимость операторов, считая их применимыми ко всем рассматриваемым функциям.

и L_2 называют оператор L такой, что $L[\varphi] = L_1[L_2[\varphi]]$. Его обозначают $L_1 L_2$. Таким образом, когда применяют к функции φ оператор $L_1 + L_2$, то сначала применяют к ней оператор L_1, а потом к ней же применяют оператор L_2 и результаты складывают. А когда к функции φ применяют оператор L_1L_2, то применяют к φ оператор L_2 и к результату применяют оператор L_1.

Пример 3. Оператор $D^2 = DD$ ставит в соответствие функции φ функцию $D^2[\varphi] = D[D[\varphi]] = (\varphi')' = \varphi''$. Вообще, $D^n[\varphi] = \varphi^{(n)}$.

Пример 4. Оператор $(xD)D$ ставит в соответствие функции φ функцию $(xD)[D[\varphi]]$, т. е. $((xD)D)[\varphi] = (xD)[\varphi'] = x(\varphi')' = x\varphi''$. Оператор же $D(xD)$ ставит в соответствие той же функции φ функцию $D[xD[\varphi]]$, т. е.

$$(D(xD))[\varphi] = D[x\varphi'] = (x\varphi')' = \varphi' + x\varphi''.$$

Видим, что $(xD)D \neq D(xD)$. Таким образом, *умножение операторов, вообще говоря, не коммутативно*. В то же время оно ассоциативно: для любых трех операторов L_1, L_2, L_3 имеем: $(L_1L_2)L_3 = L_1(L_2L_3)$.

В самом деле, легко проверить, что результат применения обеих частей равенства к функции φ равен $L_1[L_2[L_3[\varphi]]]$. Кроме того, умножение операторов дистрибутивно относительно сложения как слева, так и справа:

$$L_1(L_2 + L_3) = L_1L_2 + L_1L_3,$$
$$(L_2 + L_3)L_1 = L_2L_1 + L_3L_1.$$

Определение 4. Оператор L называют *линейным*, если для любых функций φ и ψ (к которым он применим) и любого числа C выполняются равенства:

$$L[\varphi + \psi] = L[\varphi] + L[\psi]$$

и

$$L[C\varphi] = CL[\varphi].$$

Пример 5. Оператор умножения на функцию g линеен. В самом деле, если $L[\varphi] = g\varphi$, то

$$L[\varphi + \psi] = g(\varphi + \psi) = g\varphi + g\psi = L[\varphi] + L[\psi]$$

и

$$L[C\varphi] = g(C\varphi) = C(g\varphi) = CL[\varphi].$$

Пример 6. Оператор дифференцирования D линеен. В самом деле, по правилам дифференцирования имеем:

$$D[\varphi+\psi]=(\varphi+\psi)'=\varphi'+\psi' = D[\varphi]+D[\psi]$$

и

$$D[C\varphi]=(C\varphi)'=C\varphi'=CD[\varphi].$$

Из курса алгебры известно, что сумма и произведение линейных отображений (в частности, линейных операторов) тоже линейны. Иными словами, если L_1 и L_2 — линейные операторы, то линейны и операторы L_1+L_2, L_1L_2. Например, имеем:

$$(L_1L_2)[\varphi+\psi]=L_1[L_2[\varphi+\psi]]=L_1[L_2[\varphi]+ \\ +L_2[\psi]]=L_1[L_2[\varphi]]+L_1[L_2[\psi]]=L_1L_2[\varphi]+ \\ +L_1L_2[\psi].$$

Из доказанной выше линейности операторов дифференцирования и умножения на функцию вытекает в силу сделанного замечания линейность любого оператора вида

$$L=a_0(x)D^n+a_1(x)D^{n-1}+\ldots+a_n(x). \qquad (1)$$

Будем называть его *линейным дифференциальным оператором n-го порядка.*

Пример 7. Пусть

$$L=\sin xD^2+e^xD+x^3.$$

Вычислим $L[\cos x]$.

Решение. Имеем:

$$D^2[\cos x]=(\cos x)''=-\cos x,$$
$$D[\cos x]=(\cos x)'=-\sin x,$$

и потому

$$L[\cos x]=\sin xD^2[\cos x]+e^xD[\cos x]+x^3\cos x= \\ =-\sin x\cos x-e^x\sin x+x^3\cos x.$$

В заключение отметим, что если L — линейный оператор, $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ — некоторые функции и $C_1, \ldots, C_m$ — некоторые числа, то

$$L[C_1\varphi_1+\ldots+C_m\varphi_m]=C_1L[\varphi_1]+\ldots+C_mL[\varphi_m]. \qquad (2)$$

В самом деле, при $m=2$ имеем:

$$L[C_1\varphi_1+C_2\varphi_2]=L_1[C_1\varphi_1]+L_2[C_2\varphi_2]=C_1L[\varphi_1]+ \\ +C_2L[\varphi_2].$$

Далее доказательство ведется методом математической индукции по m.

4. Общее решение однородного линейного дифференциального уравнения. Пусть

$$L = a_0(x)D^n + \ldots + a_{n-1}(x)D + a_n(x) \qquad (1)$$

— линейный дифференциальный оператор n-го порядка. Уравнение вида $L[y] = b(x)$, т. е.

$$a_0(x)y^{(n)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x), \qquad (2)$$

является линейным дифференциальным уравнением n-го порядка.

Из формулы (2) п. 3 вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть функции y_k $(1 \leqslant k \leqslant m)$ являются соответственно решениями уравнений $L[y] = b_k(x)$ $(1 \leqslant k \leqslant m)$ с одинаковой левой частью, а C_k $(1 \leqslant k \leqslant m)$—числа. Тогда функция $Y = C_1y_1 + \ldots + C_my_m$ является решением уравнения $L[y] = B(x)$, где $B(x) = C_1b_1(x) + \ldots + C_mb_m(x)$.*

Доказательство. По условию для любого k $(1 \leqslant k \leqslant m)$ выполняется равенство $L[y_k] = b_k(x)$. Следовательно, в силу формулы (2) п. 3 имеем:

$$L[Y] = L[C_1y_1 + \ldots + C_my_m] = C_1L[y_1] + \ldots$$
$$\ldots + C_mL[y_m] = C_1b_1(x) + \ldots + C_mb_m(x) = B(x).$$

Это и означает, что функция Y удовлетворяет уравнению $L[y] = B(x)$.

В случае, когда все b_k $(1 \leqslant k \leqslant m)$ равны нулю, при любых значениях $C_1, \ldots, C_m$ функция $B(x) = C_1b_1(x) + \ldots + C_mb_m(x)$ тоже равна нулю, и отсюда получаем:

Следствие. *Если функции $y_k(x)$ $(1 \leqslant k \leqslant m)$ являются решениями однородного линейного дифференциального уравнения $L[y] = 0$, то любая линейная комбинация $L = C_1y_1 + \ldots + C_my_m$ этих функций является решением этого же уравнения.*

Доказанное утверждение означает, что совокупность решений уравнения $L[y] = 0$ образует линейное пространство *. Обозначим это пространство решений через S_L и найдем размерность пространства S_L. Напомним, что векторы $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ линейного пространства Λ называют *линей-*

* Это утверждение является частным случаем общей теоремы линейной алгебры, согласно которой полный прообраз нуля при линейном отображении является линейным пространством.

но зависимыми, если хотя бы один из них можно выразить в виде линейной комбинации остальных векторов, например:

$$y_n = a_1 y_1 + \ldots + a_{n-1} y_{n-1}.$$

Если такого выражения не существует, то векторы y_1, ..., y_n называют *линейно независимыми*. В этом случае равенство $C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n = 0$ может выполняться в том и только в том случае, когда все числа $C_1, \ldots, C_n$ равны нулю.

Базисом пространства Λ называют систему линейно независимых векторов $y_1, \ldots y_n$, такую, что любой вектор y из Λ можно представить в виде их линейной комбинации

$$y = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n.$$

Число векторов в базисе называют *размерностью* пространства Λ.

Указанные понятия применимы к любой системе функций, заданной на некотором промежутке X, если она образует линейное пространство (т. е. вместе с двумя функциями содержит их сумму, а вместе с каждой функцией φ все произведения $C\varphi$, $C \in \boldsymbol{R}$).

Именно функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ называют *линейно независимыми на промежутке* X, если из того, что функция $C_1\varphi_1 + \ldots + C_n\varphi_n$ тождественно равна нулю на X, вытекает, что все коэффициенты $C_1, \ldots, C_n$ равны нулю. Если функции φ и ψ линейно независимы на X, то их частное непостоянно на X. Обратно, если частное функций φ и ψ (где ψ не является нулевой функцией) непостоянно на X, то φ и ψ линейно независимы на X.

Предположим, что на промежутке X непрерывны все коэффициенты p_k $(1 \leqslant k \leqslant m)$ приведенного однородного линейного уравнения $L[y] = 0$, где

$$L = D^n + p_1(x) D^{n-1} + \ldots + p_n(x).$$

Тогда на этом промежутке X для уравнения $L[y] = 0$ выполнена теорема существования и единственности. Поэтому, если выбрать на X любую точку x_0, то для любой системы чисел $C_0, \ldots, C_{n-1}$ найдется одно и только одно решение y уравнения $L[y] = 0$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(x_0) = C_0$, $y'(x_0) = C_1$, ..., $y^{(n-1)}(x_0) = C_{n-1}$. Это значит, что отображение

$$A : y \to (y(x_0), y'(x_0), \ldots, y^{(n-1)}(x_0)) \qquad (3)$$

пространства S_L в пространство R^n (состоящее из числовых кортежей длины n) взаимно однозначно. Это отображение в то же время линейно. В самом деле,

$$A(y+z) = ((y+z)(x_0),\ (y+z)'(x_0),\ \ldots,\ (y+z)^{(n-1)}(x_0)) = \\ = (y(x_0)+z(x_0),\ y'(x_0)+z'(x_0),\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) + \\ + z^{(n-1)}(x_0)) = (y(x_0),\ y'(x_0),\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)) + \\ + (z(x_0),\ z'(x_0),\ \ldots,\ z^{(n-1)}(x_0)) = A(y) + A(z).$$

$$A(Cy) = ((Cy)(x_0),\ (Cy)'(x_0),\ \ldots,\ (Cy)^{(n-1)}(x_0)) = \\ = (C\,y(x_0),\ C\,y'(x_0), \ldots,\ Cy^{(n-1)}(x_0)) = \\ = C\,(y(x_0),\ y'(x_0),\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)) = CA(y).$$

Поэтому пространства S_L и R^n изоморфны и, значит, имеют одинаковую размерность. Но размерность пространства R^n равна n*. Поэтому и размерность пространства S_L тоже равна n. Мы доказали следующее утверждение:

Теорема 2. *Пусть на промежутке X непрерывны коэффициенты приведенного однородного линейного дифференциального уравнения $L[y] = 0$ порядка n:*

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0. \qquad (4)$$

Тогда размерность пространства S_L решений этого уравнения на промежутке X равна n.

Эта теорема означает, что существуют n решений $y_1, \ldots, y_n$ уравнения $L[y] = 0$ на X, которые линейно независимы, причем любое решение y этого уравнения на X является линейной комбинацией указанных решений:

$$y = C_1y_1 + \ldots + C_ny_n. \qquad (5)$$

Поскольку в выражение (5) входят n произвольных постоянных $C_1, \ldots, C_n$ и путем подбора этих постоянных можно получить любое решение y уравнения (4) (а тем самым удовлетворить любым начальным условиям Коши), то (5) является общим решением уравнения (4).

Итак, мы доказали следующее утверждение:

Теорема 3. *Пусть на X непрерывны коэффициенты приведенного однородного линейного дифференциального уравнения n-го порядка. Тогда общее решение этого уравнения на X имеет вид: $y = C_1y_1 + \ldots + C_ny_n$, где $y_1, \ldots, y_n$ —*

---

* В нем можно выбрать базис из векторов $e_1, \ldots, e_n$, где $e_k = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ и единица на k-м месте.

любая система, состоящая из n линейно независимых решений данного уравнения.

Систему функций, образующую базис в пространстве S_L решений линейного однородного уравнения n-го порядка $L[y]=0$, называют *фундаментальной системой решений* этого уравнения. Фундаментальная система решений состоит из n линейно независимых решений этого уравнения.

5. Определитель Вронского. Непосредственное выяснение линейной зависимости или независимости данной системы функций сравнительно сложно. Однако в случае, когда эти функции являются решениями уравнения

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)\,y = 0 \tag{1}$$

с непрерывными коэффициентами, вопрос сводится к вычислению некоторого определителя n-го порядка.

Напомним сначала, что система векторов

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1 &= (y_{11}, \ldots, y_{1n}),\\ &\cdots\cdots\cdots\\ \mathbf{y}_n &= (y_{n1}, \ldots, y_{nn}) \end{aligned}$$

в пространстве $\mathbf{R}^n$ линейно независима в том и только в том случае, когда отличен от нуля определитель

$$\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n}\\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix},$$

составленный из координат этих векторов.

Пусть $L[y]=0$ — однородное линейное дифференциальное уравнение вида (1) с непрерывными на промежутке X коэффициентами и S_L — пространство его решений. В п. 4 было показано, что отображение $A: y \to (y(x_0), y'(x_0), \ldots, y^{(n-1)}(x_0))$, ставящее в соответствие каждой функции y из S_L значения в точке x_0 самой функции и ее производных до $n-1$-го порядка включительно, является изоморфизмом между S_L и $\mathbf{R}^n$. Отсюда следует, что решения $y_1, \ldots, y_n$ уравнения (1) линейно независимы в том и только в том случае, когда линейно независимы соответствующие им векторы $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ с координатами:

$$\mathbf{y}_k = (y_k(x_0), y_k'(x_0), \ldots, y_k^{(n-1)}(x_0)), \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

А это будет в том и только в том случае, когда отличен от нуля определитель

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_1'(x_0) & \dots & y_1^{(n-1)}(x_0) \\ y_2(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_2^{(n-1)}(x_0) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n(x_0) & y_n'(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix}, \qquad (2)$$

составленный из координат этих векторов.

Определитель (2) является значением в точке x_0 определителя

$$W(y_1, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_1'(x) & \dots & y_1^{(n-1)}(x_0) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n(x) & y_n'(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}, \qquad (3)$$

введенного в математику польским ученым Ю. Вронским (1776—1853) и называемого *определителем Вронского* или *вронскианом*.

Мы показали, что *для линейной независимости решений $y_1, \dots, y_n$ уравнения* (1) *необходимо и достаточно, чтобы вронскиан $W(y_1, \dots, y_n)$ этих решений был отличен от нуля в некоторой точке x_0 промежутка X*. Но точку x_0 можно выбирать на промежутке X произвольно. Если в одной из точек этого промежутка отличен от нуля вронскиан решений $y_1, \dots, y_n$ уравнения, то эти решения линейно независимы на X, а тогда их вронскиан отличен от нуля и в любой другой точке того же промежутка. Мы доказали следующее утверждение:

Теорема. *Пусть на промежутке X непрерывны коэффициенты $p_1(x), \dots, p_n(x)$ приведенного однородного линейного дифференциального уравнения*

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0. \qquad (4)$$

Для того чтобы решения $y_1, \dots, y_n$ этого уравнения были линейно независимы на X, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы в одной точке x_0 этого промежутка их вронскиан был отличен от нуля. В этом случае он будет отличен от нуля и в остальных точках того же промежутка.

Пример. Докажем, что выражение $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-3x}$ является общим решением уравнения

$$y'' + y' - 6y = 0. \qquad (5)$$

Решение. Прямая проверка показывает, что e^{2x}

является решением для (5), имеем: $(e^{2x})' = 2e^{2x}$, $(e^{2x})'' = 4e^{2x}$, и потому $(e^{2x})'' + (e^{2x})' - 6e^{2x} = 4e^{2x} + 2e^{2x} - 6e^{2x} = 0$. Аналогично проверяется, что e^{-3x} тоже решение этого уравнения. Эти решения линейно независимы, так как

$$W(e^{2x}, e^{-3x}) = \begin{vmatrix} e^{2x} & 2e^{2x} \\ e^{-3x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -5e^{-x},$$

а функция $-5e^{-x}$ не обращается в нуль ни в одной точке X. Значит, по теореме 3 п. 4 $Y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}$ — общее решение этого уравнения.

6. Составление уравнения по фундаментальной системе решений. Если задана система n линейно независимых функций $y_1, \dots, y_n$, имеющих непрерывные производные до n-го порядка включительно на промежутке X, то существует одно и только одно приведенное однородное линейное дифференциальное уравнение n-го порядка, для которого эти функции образуют фундаментальную систему решений (т. е. базис в пространстве решений). Чтобы доказать это утверждение, надо сначала написать приведенное уравнение n-го порядка с данной системой решений, а потом доказать, что иных приведенных уравнений с той же фундаментальной системой решений не существует.

Требуемое уравнение составляется так: приравниваем к нулю определитель $(n+1)$-го порядка $W(y, y_1, \dots, y_n)$:

$$\begin{vmatrix} y & y' & \dots & y^{(n-1)} & y^{(n)} \\ y_1 & y_1' & \dots & y_1^{(n-1)} & y_1^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n & y_n' & \dots & y_n^{(n-1)} & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0. \tag{1}$$

Разложив его по элементам первой строки, получим уравнение вида

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0,$$

где $a_0(x), \dots, a_n(x)$ — алгебраическое дополнение элементов $y, \dots, y^{(n)}$ первой строки определителя (1). В частности, коэффициент при $y^{(n)}$ может отличаться лишь знаком от минора

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_1' & \dots & y_1^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n & y_n' & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

т. е. от вронскиана $W(y_1, \dots, y_n)$. Поскольку по условию решения $y_1, \dots, y_n$ линейно независимы, этот вронскиан отличен от нуля на промежутке X. И потому можно разделить на него обе части уравнения, получив искомое приведенное уравнение с данной фундаментальной системой решений $y_1, \dots, y_n$.

Пример. Напишем приведенное однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка, имеющее фундаментальную систему решений: $y_1 = \sin x$, $y_2 = \operatorname{tg} x$.

Решение. Составляем определитель третьего порядка

$$W(y, \sin x, \operatorname{tg} x) = \begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ \sin x & \cos x & -\sin x \\ \operatorname{tg} x & \frac{1}{\cos^2 x} & \frac{2\sin x}{\cos^3 x} \end{vmatrix}$$

и приравниваем его к нулю. Раскрывая определитель, получаем:

$$\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \sin x\right) y'' - \left(\frac{2\sin^2 x}{\cos^3 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos x}\right) y' + \frac{3\sin x}{\cos^2 x} y = 0,$$

т. е. $\dfrac{\sin^3 x}{\cos^2 x} y'' - \dfrac{\sin^2 x\,(2 + \cos^2 x)}{\cos^3 x} y' + \dfrac{3\sin x}{\cos^2 x} y = 0.$

Значит, приведенное уравнение имеет вид:

$$y'' - \frac{2 + \cos^2 x}{\sin x \cos x} y' + \frac{3y}{\sin^2 x} = 0.$$

Его особыми точками являются точки, где $\sin x = 0$ или $\cos x = 0$, т. е. точки $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Нам осталось показать, что другого приведенного уравнения n-го порядка с той же фундаментальной системой решений $y_1, \dots, y_n$ не существует. Проведем доказательство от противного. Предположим, что функции $y_1, \dots, y_n$ образуют фундаментальную систему решений как для уравнения $L[y] = 0$, так и для уравнения $M[y] = 0$, где L и M — различные приведенные дифференциальные операторы n-го порядка. Тогда для любого k имеем: $L[y_k] = 0$ и $M[y_k] = 0$, а потому и $(L - M)[y_k] = L[y_k] -$

$-M[y_k]=0$. Это означает, что функции $y_1, \ldots, y_n$ образуют линейно независимую систему решений уравнения $(L-M)[y]=0$.

Но порядок этого уравнения меньше n (при вычитании приводятся к нулю старшие слагаемые, которые равны $y^{(n)}$). Поэтому размерность пространства решений для $(L-M)[y]=0$ тоже меньше n, и, значит, в нем не может быть n линейно независимых функций. Полученное противоречие показывает, что функции $y_1, \ldots, y_n$ не могут удовлетворять двум различным приведенным линейным дифференциальным уравнениям n-го порядка, т. е. они образуют фундаментальную систему решений лишь для одного такого уравнения.

7. Формула Остроградского*. Пусть L — приведенный линейный дифференциальный оператор n-го порядка

$$L=D^n+p_1(x)D^{n-1}+\ldots+p_n(x),$$

коэффициенты $p_k(x)$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ которого непрерывны на промежутке X. Возьмем какую-нибудь фундаментальную систему решений y_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ дифференциального уравнения $L[y]=0$ и обозначим вронскиан $W(y_1, \ldots, y_n)$ этой системы решений через $W(x)$.

Теорема. *Для любых двух точек x_0 и x промежутка X выполняется равенство***

$$W(x)=W(x_0)\exp\left(-\int_{x_0}^{x}p_1(x)\,dx\right). \tag{1}$$

Это равенство называют *формулой Остроградского.*

Доказательство. Проведем доказательство при $n=2$. В этом случае имеем:

$$W(x)=W(y_1, y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_1' \\ y_2 & y_2' \end{vmatrix}=y_1y_2'-y_2y_1'.$$

Значит,

$$\begin{aligned} W'(x)=(y_1y_2'-y_2y_1')'&=y_1'y_2'+y_1y_2''-y_2'y_1'-\\ &-y_2y_1''=y_1y_2''-y_2y_1''. \end{aligned} \tag{2}$$

---

* М. В. Остроградский (1801—1862) — выдающийся русский математик, один из основателей Петербургской математической школы.

** Для удобства вместо e^x пишем $\exp x$.

Но по условию y_1 и y_2 являются решениями дифференциального уравнения

$$y'' + p_1(x)\, y' + p_2(x)\, y = 0,$$

и потому

$$y_1'' + p_1(x)\, y_1' + p_2(x)\, y_1 = 0, \quad y_2'' + p_1(x)\, y_2' + p_2(x)\, y_2 = 0.$$

Находя из этих равенств значения y_1'' и y_2'' и подставляя в равенство (2), получаем, что

$$W'(x) = y_1(-p_1(x)\, y_2' - p_2(x)\, y_2) - y_2(-p_1(x)\, y_1' - p_2(x)\, y_1) = -p_1(x)(y_1 y_2' - y_2 y_1') = -p_1(x)\, W(x).$$

Итак, мы доказали, что функция $W(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению первого порядка с разделяющимися переменными:

$$W'(x) = -p_1(x)\, W(x).$$

Решая это уравнение, получаем, что

$$\frac{dW}{W} = -p_1(x)\, dx$$

и потому
$$\int\limits_{x_0}^{x} \frac{dW}{W} = -\int\limits_{x_0}^{x} p_1(x)\, dx,$$

а это означает, что

$$\ln W(x) - \ln W(x_0) = -\int\limits_{x_0}^{x} p_1(x)\, dx.$$

Значит,
$$\ln \frac{W(x)}{W(x_0)} = -\int\limits_{x_0}^{x} p_1(x)\, dx$$

и потому
$$W(x) = W(x_0) \exp\left(-\int\limits_{x_0}^{x} p_1(x)\, dx\right).$$

З а м е ч а н и е. Формула (1) вновь подтверждает, что если определитель Вронского отличен от нуля в точке $x_0 \in X$, то он отличен от нуля и в любой другой точке x промежутка X, где непрерывен коэффициент $p_1(x)$ (если $p_1(x)$ обращается в некоторой точке $x_1 \in X$ в бесконечность, то может обратиться в бесконечность и интеграл $\int\limits_{x_0}^{x} p_1(x)\, dx$, а тогда в этой точке вронскиан может обратиться в нуль).

8. Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения n-го порядка. Пусть L — линейный дифференциальный оператор n-го порядка:

$$L = D^n + p_1 D^{n-1} + \ldots + p_n(x).$$

Тогда $L[y] = b(x)$ — неоднородное линейное уравнение n-го порядка. Уравнение $L[y] = 0$ называют соответствующим ему однородным уравнением. Имеет место следующее утверждение:

Теорема 1. *Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения $L[y] = b(x)$ равно сумме $Y + z$ общего решения Y соответствующего однородного уравнения $L[y] = 0$ и какого-либо частного решения z данного уравнения.*

Доказательство. Сначала покажем, что $Y + z$ является решением уравнения $L[y] = b(x)$. В самом деле, так как Y — общее решение уравнения $L[y] = 0$, то при любых значениях произвольных постоянных имеем: $L[Y] = 0$. Далее, z — решение уравнения $L[y] = b(x)$, и потому $L[z] = b(x)$. Из теоремы 3 п. 4 получаем, что $Y + z$ — решение уравнения $L[y] = b(x)$. Осталось показать, что $Y + z$ является общим решением этого уравнения, т. е. что путем подбора произвольных постоянных можно удовлетворить любым начальным условиям Коши: $y(x_0) = c_0$, $y'(x_0) = c_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = c_{n-1}$. Но из $y = Y + z$ следует, что $y^{(k)} = Y^{(k)} + z^{(k)}$ и потому равенство $y^{(k)}(x_0) = c_k$ означает, что $Y^{(k)}(x_0) + z^{(k)}(x_0) = c_k$, т. е. что $Y^{(k)}(x_0) = c_k - z^{(k)}(x_0)$. Поэтому достаточно подобрать произвольные постоянные $C_1, \ldots, C_n$ так, чтобы выполнялись условия: $Y^{(k)}(x_0) = c_k - z^{(k)}(x_0)$. Но это можно сделать, поскольку Y является общим решением для уравнения $L[y] = 0$.

Пример 1. Найдем общее решение линейного неоднородного уравнения $y'' - 4y = 8x^2$.

Решение. Соответствующим однородным уравнением является уравнение $y'' - 4y = 0$. Функции $y = e^{2x}$ и $y = e^{-2x}$ образуют базис в пространстве решений этого уравнения. Действительно, во-первых, это решения однородного уравнения $y'' - 4y = 0$. Во-вторых, они линейно независимы, ибо их вронскиан

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{2x} & 2e^{2x} \\ e^{-2x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

Далее, функция $z = -2x^2 - 1$ является частным решением заданного неоднородного уравнения, ибо $L[z] = z'' - 4z = -4 - 4(-2x^2 - 1) = 8x^2$. Общим решением заданного неоднородного уравнения согласно теореме 1 является функция $y = Y + z = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} - 2x^2 - 1$.

Пример 2. Найдем частное решение линейного неоднородного уравнения $y'' - 4y = 8x^2$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 1$, $y'(0) = -4$.

Решение. Общее решение данного уравнения (найдено в примере 1) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} - 2x^2 - 1$. Теперь, используя начальные условия, найдем значения C_1 и C_2. Так как $y' = 2C_1e^{2x} - 2C_2e^{-2x} - 4x$, то в силу начальных условий получим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2, \\ C_1 - C_2 = -2, \end{cases}$$

откуда $C_1 = 0$, $C_2 = 2$. Поэтому искомым частным решением является функция $y = 2e^{-2x} - 2x^2 - 1$.

9. Метод вариации произвольных постоянных. Теорема 1 п. 8 сводит отыскание общего решения неоднородного линейного уравнения $L[y] = b(x)$ к отысканию общего решения Y соответствующего однородного уравнения $L[y] = 0$ и какого-либо частного решения z уравнения $L[y] = b(x)$. Мы покажем сейчас, что, зная общее решение $Y = C_1y_1 + \ldots + C_ny_n$ уравнения $L[y] = 0$, можно с помощью квадратур (вычисления интегралов) найти частное решение уравнения $L[y] = b(x)$. Ради простоты проведем рассуждения при $n = 2$. Будем искать это частное решение в следующем виде:

$$z = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2. \tag{1}$$

Иными словами, заменим произвольные постоянные C_1, C_2 новыми искомыми функциями $C_1(x)$, $C_2(x)$. Эти функции следует подобрать так, чтобы функция z была решением уравнения $L[y] = b(x)$. Поскольку общее число искомых функций равно двум, мы можем сами наложить на них еще одно условие. Из (1) следует, что

$$z' = (C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2) + (C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2'). \tag{2}$$

Условие, которое мы налагаем на функции $C_1(x)$, $C_2(x)$, заключается в том, что

$$C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0. \tag{3}$$

Тогда $z' = C_1(x)\,y_1' + C_2(x)\,y_2'$, и потому

$$z'' = (C_1'(x)\,y_1' + C_2'(x)\,y_2') + (C_1(x)\,y_1'' + C_2(x)\,y_2'').$$

Подставим выражения для z, z' и z'' в левую часть уравнения $L[y] = b(x)$, где $L = D^2 + p_1(x)\,D + p_2(x)$. Так как $L[y_1] = y_1'' + p_1(x)\,y_1' + p_2(x)\,y_1$ и $L[y_2] = y_2'' + p_1(x)\,y_2' + p_2(x)\,y_2$, то $L[z] = (C_1'(x)\,y_1' + C_2'(x)\,y_2') + (C_1(x)\,y_1'' + C_2(x)\,y_2'') + p_1(x)(C_1(x)\,y_1' + C_2(x)\,y_2') + p_2(x)(C_1(x)\,y_1 + C_2(x)\,y_2) = (C_1'(x)\,y_1' + C_2'(x)\,y_2') +$

$$+ C_1(x)(y_1'' + p_1(x)\,y_1' + p_2(x)\,y_1) + C_2(x)(y_2'' +$$
$$+ p_1(x)\,y_2' + p_2(x)\,y_2) = C_1'(x)\,y_1' + C_2'(x)\,y_2' +$$

$+ C_1(x)\,L[y_1] + C_2(x)\,L[y_2]$. Но по условию y_1 и y_2 — решения однородного уравнения $L[y] = 0$, и потому $L[y_1] = L[y_2] = 0$. Значит,

$$L[z] = C_1'(x)\,y_1' + C_2'(x)\,y_2'.$$

Поэтому уравнение $L[z] = b(x)$ принимает вид:

$$C_1'(x)\,y_1' + C_2'(x)\,y_2' = b(x). \qquad (4)$$

Мы получили, таким образом, для отыскания функций $C_1(x)$, $C_2(x)$ систему из двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x)\,y_1 + C_2'(x)\,y_2 = 0, \\ C_1'(x)\,y_1' + C_2'(x)\,y_2' = b(x). \end{cases} \qquad (5)$$

Определитель этой системы уравнений равен $W(y_1, y_2)$ и в силу линейной независимости функций y_1, y_2 отличен от нуля. Поэтому систему уравнений (5) можно решить относительно функций $C_1'(x)$, $C_2'(x)$.

А теперь достаточно вычислить интегралы от $C_1'(x)$, $C_2'(x)$, чтобы получить значения $C_1(x)$, $C_2(x)$, а затем найти функцию $z(x) = C_1(x)\,y_1 + C_2(x)\,y_2$.

Для уравнения n-го порядка

$$y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)\,y = b(x)$$

система (5) принимает вид:

$$\begin{cases} C_1'(x)\,y_1 + \ldots + C_n'(x)\,y_n = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ C_1'(x)\,y_1^{(n-2)} + \ldots + C_n'(x)\,y_n^{(n-2)} = 0, \\ C_1'(x)\,y_1^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)\,y_n^{(n-1)} = b(x). \end{cases}$$

Пример. Найдем методом вариации постоянных общее решение уравнения

$$y'' - y = 8e^x. \tag{6}$$

Решение. Имеем линейное неоднородное уравнение 2-го порядка, в котором $p_1(x) = 0$, $p_2(x) = -1$, $b(x) = 8e^x$. Все эти функции непрерывны. Соответствующим однородным уравнением является уравнение

$$y'' - y = 0. \tag{7}$$

Легко убедиться, что функции $y_1 = e^x$ и $y_2 = e^{-x}$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (7). Поэтому его общим решением будет $Y = C_1e^x + C_2e^{-x}$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Будем искать частное решение уравнения (6) в виде

$$z = C_1(x)e^x + C_2(x)\,e^{-x}.$$

Для отыскания $C_1(x)$ и $C_2(x)$ запишем систему уравнений см. (5)):

$$\begin{cases} C_1'(x)\,e^x + C_2'(x)\,e^{-x} = 0, \\ C_1'(x)\,e^x - C_2'(x)\,e^{-x} = 8e^x, \end{cases} \tag{8}$$

откуда $C_1'(x) = 4$, $C_2'(x) = -4e^{2x}$.

Проинтегрировав, найдем: $C_1(x) = 4x$, $C_2(x) = -2e^{2x}$. Значит,

$$z = C_1(x)\,e^x + C_2(x)\,e^{-x} = 4xe^x - 2e^{2x}\,e^{-x} = (4x - 2)\,e^x.$$

Так как $Y = C_1e^x + C_2e^{-x}$, то общее решение уравнения (6) имеет вид:

$$y = Y + z = C_1e^x + C_2e^{-x} + (4x - 2)\,e^x. \tag{9}$$

Замечание. Ответ (9) можно получить, записывая результат интегрирования $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ с произвольными постоянными:

$$C_1(x) = 4x + C_1,\ C_2(x) = -2e^{2x} + C_2.$$

Тогда сразу получаем ответ в виде

$$y = C_1(x)\,y_1 + C_2(x)\,y_2 = (4x + C_1)\,e^x + (-2e^{2x} + \\ + C_2)\,e^{-x} = C_1e^x + C_2e^{-x} + (4x - 2)\,e^x = (C_1 - 2)\,e^x + \\ + C_2e^{-x} + 4xe^x.$$

В виду произвольности C_1 этот ответ можно переписать в виде

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + 4xe^x.$$

Вопросы для самопроверки

1. Какие дифференциальные уравнения называются линейными?

2. Что называется свободным членом линейного дифференциального уравнения высшего порядка?

3. Какие линейные уравнения называются однородными, а какие неоднородными?

4. Что называется линейным дифференциальным оператором?

5. Приведите примеры линейных дифференциальных операторов.

6. Являются ли линейными дифференциальными операторами:

а) куб линейного дифференциального оператора;

б) сумма куба линейного дифференциального оператора и его квадрата?

7. Какие равенства надо проверить для доказательства линейности оператора L?

8. Обозначим через T_h оператор сдвига:

$$(T_h f)(x) = f(x+h).$$

Докажите, что $T_h = 1 + hD + \ldots + \frac{h^n D^n}{n!} + \ldots = e^{hD}$.

Указание. Используйте формулу Тейлора.

9. В чем особенность теоремы существования и единственности решения для систем линейных дифференциальных уравнений и для линейных дифференциальных уравнений высшего порядка?

10. Запишите систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка в матричной форме. Объясните смысл каждого обозначения.

11. Запишите уравнение $L[y] = b(x)$, если:

а) $L = \sin x D^2 - x^3 D + \cos x$, $b(x) = \operatorname{tg} x$;

б) $L = D^3 - 8x$, $b(x) = e^x \cos x$.

12. Какие линейные дифференциальные операторы называются приведенными?

13. Как доказать, что пространство решений уравнения $L[y] = 0$ линейно?

14. Какую размерность имеет пространство решений уравнения $L[y] = 0$, если L — приведенный линейный дифференциальный оператор четвертого порядка с непрерывными коэффициентами?

15. Какие точки могут быть особыми для уравнения $L[y] = 0$, если L — линейный дифференциальный оператор с непрерывными коэффициентами?

16. Могут ли быть особые точки у уравнения $L[y] = 0$, если L — линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами?

17. Какая система функций $y_1, \ldots, y_n$, заданных на отрезке X, называется линейно зависимой на этом отрезке? линейно независимой?

18. n функций $y_1, \ldots, y_n$ линейно независимы. Могут ли m из них, где $m < n$, оказаться линейно зависимыми?

19. Какая система решений линейного однородного уравнения называется фундаментальной?

20. Чем является фундаментальная система решения однородного уравнения для пространства решений этого уравнения?

21. Сформулируйте и докажите теорему о структуре общего решения линейного однородного уравнения (основная теорема).

22. Может ли линейное однородное уравнение пятого порядка иметь семь линейно независимых частных решений?

23. Как устанавливается изоморфизм между пространством решений S_L уравнения $L[y] = 0$ порядка n и пространством R^n?

24. Как пишется определитель Вронского для системы решений y_1, y_2, y_3 линейного однородного дифференциального уравнения третьего порядка?

25. При каком условии система решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ однородного линейного дифференциального уравнения n-го порядка образует базис в пространстве решений?

26. Пусть определитель Вронского $W(y_1, \ldots, y_n)$ системы решений уравнения $L[y] = 0$ порядка n отличен от нуля в точке x_0. Для каких еще точек можно гарантировать, что он отличен от нуля? В каких точках он может обратиться в нуль?

27. Охарактеризуйте структуру общего решения линейного неоднородного уравнения.

28. Если вместо частного решения z неоднородного уравнения (1) взять другое частное решение этого уравнения, то как запишется общее решение этого уравнения?

29. В чем заключается идея метода вариации постоянных?

30. Как получаются уравнения, входящие в систему (5)?

31. Почему система (5) линейных уравнений относительно $C_1(x)$ и $C_2(x)$ всегда имеет решения?

Упражнения

1. Найдите значения оператора $L[y] = y''' - 2y'' + e^x y$, если: а) $y = \cos x$; б) $y = 2x + 7$.

2. Найдите значения оператора $L[y] = y'' - y' \cos 2x + y \sin 2x$, если: а) $y = 3 \sin 2x$; б) $y = 7$.

3. Дано линейное однородное уравнение $y''' - y'' x \sin x + y' \sin x = 0$. Какие из функций а) e^x; б) 8; в) x^2 являются решениями этого уравнения?

4. Дано линейное однородное уравнение $y''' - y'' = 0$. Какие из функций $y_1 = e^x$, $y_2 = 3e^{2x}$, $y_3 = \sin 4x$, $y_4 = e^{-2x}$, $y_5 = 7x - 10$ принадлежат пространству S_L решений этого уравнения?

5. Укажите образы элементов при изоморфном отображении пространства S_L решений однородного уравнения третьего порядка на пространство R^3, определяемом начальными условиями:
а) $y(1) = 2$, $y'(1) = -1$, $y''(1) = 3$;
б) $y(1) = 21$, $y'(1) = -11$, $y''(1) = 8$.

6. Докажите, что функции e^{3x} и e^{7x} линейно независимы на всей числовой прямой.

7. Докажите, что функции $y_1 = 2\sin^2 x$, $y_2 = -7\cos^2 x$, $y_3 = 4$, $y_4 = 8x^2$ линейно зависимы на любом отрезке X.

8. Докажите, что функции $y_1 = e^{2x} \cos x$ и $y_2 = e^{5x} \cos x$ линейно независимы на интервале $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

9. Убедитесь, что функции $y_1 = \cos 5x$ и $y_2 = \sin 5x$ образуют фундаментальную систему частных решений линейного однородного

уравнения $y'' + 25y = 0$ и напишите общее решение этого уравнения.

10. Найдите частные решения уравнения $y'' + 25y = 0$, удовлетворяющие начальным условиям:

а) $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$; б) $y\left(\frac{\pi}{10}\right) = 3$, $y'\left(\frac{\pi}{10}\right) = -5$.

11. Докажите, что функции $y_1 = x$, $y_2 = \cos x$, $y_3 = \sin x$ образуют фундаментальную систему решений уравнения $xy''' - y'' + xy' - y = 0$ и найдите частное решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y(\pi) = 1,\ y'(\pi) = 0,\ y''(\pi) = 1.$$

Напишите определитель Вронского для заданных систем функций:

12. $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = x^3$, $y_3 = \cos x$.

13. $y_1 = \sin^2 x$, $y_2 = \cos^2 x$, $y_3 = x$.

14. $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$, $y_3 = e^{k_3 x}$.

Используя определитель Вронского, убедитесь в линейной независимости заданных систем функций:

15. $y_1 = 8\cos^2 x$, $y_2 = e^x$, $y_3 = 2$.

16. $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{3x}$, $y_3 = e^{7x}$.

17. $y_1 = \cos 3x$, $y_2 = \sin 3x$, $y_3 = 7$.

Составьте дифференциальное уравнение по заданной фундаментальной системе решений:

18. $y_1 = x_1$, $y_2 = \cos x$, $y_3 = \sin x$.

19. $y_1 = 2x$, $y_2 = x - 2$, $y_3 = e^x$.

20. $y_1 = x$, $y_2 = x^2$, $y_3 = x^3$. 21. $y_1 = \cos^2 x$, $y_2 = \sin^2 x$.

22. $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$. 23. $y_1 = e^x$, $y_2 = e^x \sin x$, $y_3 = e^x \cos x$.

Решите линейное однородное уравнение второго порядка, зная частное решение:

24. $y'' + y = 0$, $y_1 = \sin x$.

25. $y'' + \frac{2}{x} y' + y = 0$, $x > 0$, $y_1 = \frac{\sin x}{x}$.

26. $y'' - y = 0$, $y_1 - e^x$.

27. $y'' - \frac{2}{\sin^2 x} y = 0$, $y_1 = \operatorname{ctg} x$, $X \in \left]\frac{\pi}{10}; \frac{\pi}{6}\right[$.

Зная фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения, решите методом вариации постоянных заданные линейные неоднородные уравнения:

28. $y'' + y = 5$, $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$.

29. $y'' - \frac{y'}{x} = x$ $(x > 0)$, $y_1 = 1$, $y_2 = x^2$.

30. $y'' + y = \operatorname{tg}^2 x$, $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

31. $y'' - y' = \frac{1}{e^{x-1}}$, $y_1 = 1$, $y_2 = e^x$.

§ 2. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

1. Алгебра дифференциальных операторов. Характеристический многочлен. В этом параграфе будем рассматривать уравнения вида

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y = g(x),$$

где $p_1, \ldots, p_n$ — числа, которые называют *линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами*. Мы видели, что умножение дифференциальных операторов обладает свойством ассоциативности, но, вообще говоря, не является коммутативным. В то же время сложение дифференциальных операторов дистрибутивно относительно сложения (как слева, так и справа). Некоммутативность умножения дифференциальных операторов влечет за собой различия между алгеброй таких операторов и обычной алгеброй. Но есть класс дифференциальных операторов, для которых умножение коммутативно, а именно класс линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, т. е. операторов вида

$$L = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_n,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — некоторые числа.
Мы будем называть такие операторы *дифференциальными многочленами*. Коэффициенты этих многочленов могут быть комплексными, но, как правило, мы будем иметь дело с дифференциальными многочленами, имеющими действительные коэффициенты. Чтобы доказать коммутативность умножения дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, достаточно заметить, что по свойствам дифференцирования

$$(Da)[y] = (ay)' = ay' = (aD)[y]$$

и

$$(D^k D^l)[y] = (y^{(l)})^{(k)} = y^{(k+l)} = (y^{(k)})^{(l)} = (D^l D^k)[y].$$

Поскольку операции сложения и умножения дифференциальных многочленов обладают теми же свойствами, что и соответствующие операции над числами, алгебра дифференциальных многочленов аналогична обычной алгебре многочленов.

Определение. Многочлен

$$f(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_n,$$

в котором переменная r принимает числовые значения, называют *характеристическим многочленом* для дифференциального многочлена

$$L = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_n,$$

а уравнение $a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_n = 0$ — *характеристическим уравнением для* L.

Каждому тождеству для обычных многочленов соответствует тождество для дифференциальных многочленов. Например, из того, что

$$r^2 - 6r + 8 = (r-2)(r-4),$$

вытекает:

$$D^2 - 6D + 8 = (D-2)(D-4)$$

и т. д.

В курсе алгебры доказывают следующую теорему:

Теорема 1. *Любой многочлен $f(r)$ степени n можно представить в виде*

$$f(r) = a_0 (r - r_1)^{k_1} \dots (r - r_m)^{k_m},$$

где $r_1, \dots, r_m$ — корни этого многочлена, а $k_1, \dots, k_m$ — кратности этих корней. При этом $n = k_1 + \dots + k_m$.

Даже в случае, когда коэффициенты многочлена действительны, среди корней $r_1, \dots, r_m$ могут быть и комплексные. Но тогда вместе с каждым комплексным корнем $r = \alpha_1 + \beta_1 i$ в разложение входит сопряженный с ним корень $r_1 = \alpha_1 - \beta_1 i$, и притом с той же кратностью.

Из теоремы 1 вытекает, что любой дифференциальный многочлен

$$L = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_n$$

порядка n можно разложить на множители:

$$L = a_0 (D - r_1)^{k_1} \dots (D - r_m)^{k_m},$$

где $r_1, \dots, r_m$ — корни характеристического многочлена $f(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_n$ для L, а $k_1, \dots, k_m$ — кратности этих корней. Это позволяет свести изучение любых дифференциальных многочленов к изучению дифференциальных выражений вида $(D-r)^k$. Докажем следующее утверждение:

Теорема 2. *Если $P_s(x)$ — многочлен степени s и $\alpha \neq r$, то*

$$(D-r)^k [P_s(x) e^{\alpha x}] = Q_s(x) e^{\alpha x}, \qquad (1)$$

где $Q_s(x)$ тоже многочлен степени s. Кроме того, если $k \leqslant s$, то

$$(D-r)^k \; [P_s(x) e^{rx}] = Q_{s-k}{}'(x) e^{rx}, \qquad (2)$$

где $Q_{s-k}(x)$ — многочлен степени $s-k$. Если $k > s$, то

$$(D-r)^k [P_s(x) e^{rx}] = 0. \qquad (3)$$

Доказательство. Сначала найдем выражение для $(D-r)[P_s(x) e^{\alpha x}]$. Имеем:

$$(D-r)[P_s(x) e^{\alpha x}] = (P_s(x) e^{\alpha x})' - r[P_s(x) e^{\alpha x}] =$$
$$= P_s'(x) e^{\alpha x} + \alpha P_s(x) e^{\alpha x} - r[P_s(x) e^{\alpha x}] =$$
$$= e^{\alpha x}(P_s'(x) + (\alpha - r) P_s(x)).$$

Так как $P_s'(x)$ — многочлен степени $s-1$, то при $\alpha \neq r$ выражение $P_s'(x) + (\alpha - r) P_s(x)$ является многочленом степени s. Но тогда и $(D-r)^k [P_s(x) e^{\alpha x}]$ имеет вид $Q_s(x) e^{\alpha x}$, где $Q_s(x)$ — многочлен степени s.

Если $\alpha = r$, то

$$(D-r)[P_s(x) e^{rx}] = P_s'(x) e^{rx}.$$

Поскольку $P_s'(x)$ — многочлен степени $s-1$, то каждое применение оператора $D-r$ понижает на единицу степень множителя при e^{rx}, а k-кратное применение этого оператора понижает указанную степень на k. Отсюда и следует равенство (2) при $k \leqslant s$.

При $k = s$ получаем, что $(D-r)^s [P_s(x) e^{rx}] = Ae^{rx}$, где A — постоянная. Еще одно применение оператора $D-r$ обращает это выражение в нуль, поэтому при $k > s$

$$(D-r)^k [P_s(x) e^{rx}] = 0. \qquad (4)$$

В частности, $(D-r) e^{rx} = 0$.

2. Общее решение однородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Результаты, полученные в предыдущем пункте, позволяют свести решение однородных линейных дифференциальных уравнений высшего порядка к решению алгебраических уравнений. В частности, для решения таких уравнений второго порядка достаточно уметь решать квадратные уравнения.

Теорема 1. *Пусть характеристический многочлен*

$$f(r) = a_0 r^2 + a_1 r + a_2 \tag{1}$$

линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \tag{2}$$

имеет два различных корня: r_1 и r_2. Тогда общее решение уравнения (2) имеет вид:

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}.$$

Доказательство. Мы уже знаем, что уравнение (2) можно записать в виде

$$a_0 (D - r_1)(D - r_2)[y] = 0,$$

причем множители $D - r_1$ и $D - r_2$ в этом уравнении перестановочны. Так как $(D - r_1)[e^{r_1 x}] = 0$, то функция $e^{r_1 x}$ является решением уравнения (2). Аналогично доказывается, что $e^{r_2 x}$ также является его решением. Но тогда по следствию из теоремы 1 п. 4, § 1 любая линейная комбинация $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ этих решений также является решением заданного уравнения.

Чтобы доказать, что это решение является общим, надо показать линейную независимость функций $e^{r_1 x}$ и $e^{r_2 x}$. Вычислим определитель Вронского:

$$W(e^{r_1 x}, \quad e^{r_2 x}) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & r_1 e^{r_1 x} \\ e^{r_2 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1)\, e^{(r_1 + r_2)x}.$$

Так как $r_1 \neq r_2$, а функция $e^{(r_1+r_2)x}$ не обращается в нуль ни при одном значении x, то $W(e^{r_1 x}, e^{r_2 x}) \neq 0$, и потому решения $e^{r_1 x}$ и $e^{r_2 x}$ линейно независимы.

Замечание 1. Линейную независимость решений $e^{r_1 x}$ и $e^{r_2 x}$ можно доказать непосредственно. Предположим, что равенство

$$C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} = 0$$

выполняется при всех значениях x. Тогда имеем: $C_1 = -C_2\, e^{(r_2 - r_1)x}$. При $C_2 \neq 0$, $r_2 - r_1 \neq 0$ функция $-C_2 e^{(r_2 - r_1)x}$ не является постоянной. Поэтому равенство $C_1 = -C_2 e^{(r_2 - r_1)x}$ при $r_2 - r_1 \neq 0$ может иметь место лишь при условии, что $C_2 = C_1 = 0$. Итак, $C_1 e^{r_1 x} +$

$+ C_2e^{r_2x} = 0$ при всех x в том и только в том случае, когда $C_1 = C_2 = 0$. Это и значит, что функции e^{r_1x} и e^{r_2x} линейно независимы.

Замечание 2. Аналогично доказывается, что если характеристический многочлен уравнения $L[y] = 0$ n-го порядка имеет n различных корней $r_1, r_2, \ldots, r_n$, то общее решение этого уравнения имеет вид:

$$y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} + \ldots + C_ne^{r_nx}.$$

Пример 1. Найдем общее решение уравнения

$$y'' - 7y' + 12y = 0. \tag{3}$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$r^2 - 7r + 12 = 0.$$

Его корнями являются $r_1 = 3$ и $r_2 = 4$. Значит, общее решение уравнения (3) имеет вид:

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{4x}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда корни r_1 и r_2 характеристического уравнения $a_0r^2 + a_1r + a_2 = 0$ комплексны. Так как мы рассматриваем лишь уравнения с действительными коэффициентами, то эти корни комплексно сопряжены, т. е. имеют вид: $r_1 = \alpha + \beta i$, $r_2 = \alpha - \beta i$. Но тогда общее решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = C_1e^{(\alpha-\beta i)x} + C_2e^{(\alpha-\beta i)x}.$$

Преобразуем этот ответ к виду, не содержащему комплексных чисел. По формуле Эйлера имеем:

$$e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x}e^{\beta xi} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x),$$
$$e^{(\alpha-\beta i)x} = e^{\alpha x}e^{-\beta xi} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x),$$

и потому

$$y = C_1e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) + C_2e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) = e^{\alpha x}((C_1 + C_2)\cos\beta x + (C_1 - C_2)i\sin\beta x).$$

Обозначив $C_1 + C_2$ через E_1, а $(C_1 - C_2)i$ через E_2, получим:

$$y = e^{\alpha x}(E_1\cos\beta x + E_2\sin\beta x). \tag{4}$$

Чтобы доказать, что (4) также является общим решением дифференциального уравнения, осталось показать, что функции $e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $e^{\alpha x}\sin\beta x$ линейно независимы.

Это следует из того, что частное этих функций равно $\operatorname{ctg} \beta x$ и не является постоянным. Мы доказали следующую теорему:

Теорема 2. *Если корни r_1 и r_2 характеристического уравнения для уравнения*

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \tag{5}$$

комплексно сопряжены: $r_1 = \alpha + \beta i$, $r_2 = \alpha - \beta i$, $\beta \neq 0$, то общее решение уравнения (5) имеет вид:

$$y = e^{\alpha x} (E_1 \cos \beta x + E_2 \sin \beta x).$$

Пример 2. Решим уравнение

$$y'' + 4y' + 13y = 0. \tag{6}$$

Решение. Характеристическое уравнение для (6) имеет вид:

$$r^2 + 4r + 13 = 0.$$

Его корнями являются $r_1 = -2 + 3i$, $r_2 = -2 - 3i$. В данном случае $\alpha = -2$, $\beta = 3$. Значит, общее решение уравнения (6) таково:

$$y = e^{-2x} (E_1 \cos 3x + E_2 \sin 3x).$$

Замечание 3. Для уравнения

$$y'' + \omega^2 y = 0 \tag{7}$$

характеристическим является уравнение $r^2 + \omega^2 = 0$. Его корни имеют вид: $r_1 = \omega i$, $r_2 = -\omega i$. Поэтому общее решение уравнения (7) таково:

$$y = E_1 \cos \omega x + E_2 \sin \omega x.$$

Замечание 4. Аналогично записывается общее решение линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка в случае, когда его характеристическое уравнение имеет комплексные корни. Например, если корнями характеристического уравнения являются числа $r_{1,2} = 3 \pm 4i$, $r_{3,4} = -7 \pm i$, $r_5 = 6$, то общее решение соответствующего дифференциального уравнения таково:
$y = e^{3x} (E_1 \cos 4x + E_2 \sin 4x) + e^{-7x} (E_3 \cos x + E_4 \sin x) + E_5 e^{6x}$.

Нам осталось рассмотреть случай, когда характеристическое уравнение $a_0 r^2 + a_1 r + a_2 = 0$ имеет кратный корень r_1. В этом случае оно имеет вид: $a_0 (r - r_1)^2 = 0$, а потому дифференциальное уравнение можно представить в виде $a_0 (D - r_1)^2 [y] = 0$.

По следствию из теоремы 1 п. 4, § 1 вытекает, что любая функция вида $(C_1x + C_2)e^{r_1x}$ является решением уравнения:

$$a_0(D - r_1)^2[(C_1x + C_2)e^{r_1x}] = 0.$$

Эта функция является линейной комбинацией решений e^{r_1x} и xe^{r_1x}.

Покажем, что эти решения линейно независимы. В самом деле, имеем:

$$W(e^{r_1x}, xe^{r_1x}) = \begin{vmatrix} e^{r_1x} & r_1e^{r_1x} \\ xe^{r_1x} & e^{r_1x} + r_1xe^{r_1x} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} e^{r_1x} & 0 \\ xe^{r_1x} & e^{r_1x} \end{vmatrix} = e^{2r_1x}.$$

Поскольку e^{2r_1x} отлично от нуля при любом x, то решения e^{r_1x} и xe^{r_1x} линейно независимы, а потому $(C_1x+C_2)e^{r_1x}$ — общее решение заданного дифференциального уравнения.

Мы доказали следующее утверждение:

Теорема 3. *Если характеристическое уравнение для дифференциального уравнения*

$$a_0y'' + a_1y' + a_2y = 0 \tag{8}$$

имеет корень r_1 второй кратности, то общее решение для (8) имеет вид:

$$y = (C_1x + C_2)e^{r_1x}.$$

Пример 3. Найдем общее решение уравнения

$$y'' - 6y' + 9y = 0.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$r^2 - 6r + 9 = 0.$$

Оно имеет корень $r_1 = 3$ второй кратности. Значит, его общее решение имеет вид: $y = (C_1x + C_2)e^{3x}$.

Замечание 5. Если $L[y] = 0$ — однородное линейное дифференциальное уравнение n-го порядка и r_1 — корень соответствующего характеристического уравнения, имеющий кратность k, то ему соответствует в общем решении группа слагаемых вида

$$(C_1 + C_2x + \ldots + C_kx^{k-1})e^{r_1x},$$

т. е. линейная комбинация решений $e^{r_1x}, xe^{r_1x}, \ldots, x^{k-1}e^{r_1x}$.

Замечание 6. Линейная независимость решений

$$e^{r_1x}, xe^{r_1x}, \ldots, x^{k-1}e^{r_1x}$$

может быть доказана без ссылки на определитель Вронского. Пусть равенство

$$(C_1 + C_2 x + \ldots + C_k x^{k-1})\, e^{r_1 x} = 0 \qquad (9)$$

выполняется для всех значений x. Так как $e^{r_1 x}$ не обращается в нуль ни при одном значении x, то многочлен

$$C_1 + C_2 x + \ldots + C_k x^{k-1}$$

тождественно равен нулю. А это может быть лишь при условии, что все коэффициенты $C_1, C_2, \ldots, C_k$ этого многочлена равны нулю.

Итак, равенство (9) выполняется лишь при условии, что $C_1 = C_2 = \ldots = C_k$. А это и значит, что решения $e^{r_1 x}, xe^{r_1 x}, \ldots, x^{k-1} e^{r_1 x}$ линейно независимы.

Пример 4. Напишем общее решение дифференциального уравнения $L[y] = 0$, если его характеристическое уравнение имеет корни $r_{1,2,3,4} = -2$, $r_{5,6} = 6$.

Решение. Согласно замечанию 5 общее решение имеет вид:

$$y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3)\, e^{-2x} + (C_5 + C_6 x) e^{6x}.$$

Аналогично обстоит дело, если характеристическое уравнение имеет кратные комплексные корни: группе корней

$$r_1 = r_2 = \ldots = r_k = \alpha + \beta i, \quad r_{k+1} = r_{k+2} = \ldots = r_{2k} = \alpha - \beta i$$

соответствует в общем решении группа членов

$$e^{\alpha x}\left((C_1 + C_2 x + \ldots + C_k x^{k-1}) \cos \beta x + (D_1 + \ldots + D_k x^{k-1}) \sin \beta x\right).$$

Пример 5. Напишем общее решение дифференциального уравнения $L[y] = 0$, если характеристическое уравнение имеет корни $r_{1,2,3} = -5 + 2i$, $r_{4,5,6} = -5 - 2i$, $r_{7,8} = 3i$, $r_{9,10} = -3i$.

Решение. Искомое общее решение имеет вид:

$$y = e^{-5x}\left((C_1 + C_2 x + C_3 x^2) \cos 2x + (D_1 + D_2 x + D_3 x^2) \sin 2x\right) + (C_4 + C_5 x) \cos 3x + (D_4 + D_5 x) \sin 3x.$$

3. Решение неоднородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (специальный случай). Мы умеем решать любое однородное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами $L[y] = 0$. Применяя метод вариации произвольных постоянных (см. п. 9, § 1), можем найти и частное решение любого уравнения вида $L[y]=b(x)$. Однако в наиболее важных для практики случаях, когда правая часть уравнения имеет вид:

$$b(x) = e^{\alpha x}(A(x)\cos\beta x + B(x)\sin\beta x) \qquad (1)$$

(где $A(x)$ и $B(x)$ — многочлены), можно найти частное решение уравнения $L[y]=b(x)$, не прибегая к методу вариации произвольных постоянных.

Рассмотрим сначала случай, когда уравнение $L[y]=$ $=b(x)$ имеет вид:

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = A_m(x)e^{\alpha x}, \qquad (2)$$

где $A_m(x)$ — многочлен степени m от x. Имеем:

$$L = a_0 D^2 + a_1 D + a_2.$$

Если корни характеристического многочлена для L равны r_1, r_2, то

$$L = a_0(D-r_1)(D-r_2)$$

и уравнение (2) принимает вид:

$$a_0(D-r_1)(D-r_2)[y] = A_m(x)e^{\alpha x}. \qquad (3)$$

В этом пункте мы рассмотрим случай, когда число α не является корнем характеристического уравнения для L, т. е. $\alpha \neq r_1$, $\alpha \neq r_2$. По теореме в этом случае операторы $D-r_1$ и $D-r_2$ переводят выражение вида $P_m(x)e^{\alpha x}$, где $P_m(x)$ — многочлен степени m от x, в выражение того же вида (т. е. произведение $e^{\alpha x}$ на многочлен m-й степени). Но тогда тем же свойством будет обладать и оператор L, равный произведению операторов $D-r_1$ и $D-r_2$ и числа a_0.

Отсюда следует, что если положить $z=P_m(x)e^{\alpha x}$, где $P_m(x)$ — многочлен степени m с неопределенными коэффициентами, $P_m(x) = p_0x^m + \ldots + p_m$, то будем иметь:

$$L[z] = L[P_m(x)e^{\alpha x}] = R_m(x)e^{\alpha x},$$

где $R_m(x)$ также является многочленом m-й степени. Чтобы выполнялось равенство $L[P_m(x)e^{\alpha x}] = A_m(x)e^{\alpha x}$, коэффициенты многочлена $R_m(x)$ должны равняться коэффициентам при тех же степенях x многочлена $A_m(x)$. Это дает систему линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов $p_0, p_1, \ldots, p_m$.

Можно доказать, что она всегда разрешена. Решая ее, находим искомое частное решение уравнения $L[y] = A_m(x) e^{\alpha x}$.

Итак, чтобы найти частное решение z уравнения

$$L[y] = A_m(x) e^{\alpha x}$$

в случае, когда α не является корнем характеристического уравнения, для L нужно искать это решение в виде $z = P_m(x) e^{\alpha x}$, где $P_m(x)$ — многочлен m-й степени от x с неопределенными коэффициентами. Подставляя это выражение в уравнение, сокращая на $e^{\alpha x}$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа, получаем систему уравнений, из которой находим значения коэффициентов многочлена $P_m(x)$.

Если правая часть уравнения является многочленом m-й степени от x, то $\alpha = 0$. Число 0 не является корнем характеристического уравнения в том и только в том случае, когда свободный член a_2 характеристического многочлена отличен от нуля. В этом случае частное решение надо искать в виде $z = P_m(x)$, где $P_m(x)$ — многочлен m-й степени с неопределенными коэффициентами.

Аналогично ищут частное решение уравнений вида

$$L[y] = P_m(x) e^{\alpha x},$$

где L — линейный дифференциальный оператор любого порядка с постоянными коэффициентами.

Пример. Найдем частное решение уравнения

$$y'' + y' = (2x^2 - 8x + 15)e^{-2x}. \qquad (4)$$

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид: $r^2 + r = 0$. Число -2 (коэффициент при x в показателе) не является его корнем. Поэтому ищем частное решение в виде*

$$z = (p_0x^2 + p_1x + p_2) e^{-2x}.$$

Имеем:

$$z' = (2p_0x + p_1) e^{-2x} - 2(p_0x^2 + p_1x + p_2) e^{-2x} = e^{-2x}(-2p_0x^2 + (2p_0 - 2p_1)x + p_1 - 2p_2),$$

$$z'' = e^{-2x}(-4p_0x + 2p_0 - 2p_1) - 2e^{-2x}(-2p_0x^2 + (2p_0 - 2p_1)x + p_1 - 2p_2) = e^{-2x}(4p_0x^2 + (-8p_0 + 4p_1)x + (2p_0 - 4p_1 + 4p_2)).$$

---

* Пишут также: $z = (Ax^2 + Bx + C) e^{-2x}$.

Подставляя эти значения в уравнение (4), получаем:

$$e^{-2x}\ (4p_0x^2 + (-8p_0 + 4p_1)\,x + (2p_0 - 4p_1 + 4p_2)) + \\ + e^{-2x}\,(-2p_0x^2 + (2p_0 - 2p_1)\,x + p_1 - 2p_2) = \\ = (2x^2 - 8x + 15)\,e^{-2x},$$

т. е.

$$2p_0x^2 + (-6p_0 + 2p_1)\,x + 2p_0 - 3p_1 + 2p_2 = 2x^2 - \\ - 8x + 15.$$

Отсюда получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2p_0 = 2, \\ -6p_0 + 2p_1 = -8, \\ 2p_0 - 3p_1 + 2p_2 = 15. \end{cases}$$

Решая ее, находим: $p_0 = 1$, $p_1 = -1$, $p_2 = 5$, и потому $z = (x^2 - x + 5)\,e^{-2x}$.

4. Решение неоднородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (случай резонанса). Рассмотрим теперь случай, когда в уравнении

$$L\,[y] \equiv a_0y'' + a_1y' + a_2y = A_m\,(x)\,e^{\alpha x} \tag{1}$$

коэффициент α в показателе является одним из корней характеристического уравнения, например $\alpha = r_1$. Запишем уравнение в виде

$$a_0\,(D - r_1)\,(D - r_2)\,[y] = A_m\,(x)\,e^{r_1x}. \tag{1'}$$

По теореме 2 п. 1 применение оператора $D - r_1$ к выражению вида $A_m\,(x)\,e^{r_1x}$, где $A_m\,(x)$ — многочлен от x, понижает на единицу степень этого многочлена, а применение оператора $D - r_2$ (при $r_1 \neq r_2$) не меняет степени многочлена. Поэтому ясно, что частное решение уравнения(1′) надо искать в виде $z = p_{m+1}\,(x)\,e^{r_1x}$, где $p_{m+1}\,(x)$ — многочлен степени $m + 1$ с неопределенными коэффициентами. При этом следует учесть, что оператор $a_0\,(D - r_1)\,(D - r_2)$ обращает слагаемое вида $p_{m+1}\,e^{r_1x}$ в нуль, а потому такое слагаемое можно отбросить. Тогда z будет иметь вид:

$$z = (p_0\,x^{m+1} + p_1x^m + \ldots + p_mx)\,e^{r_1x} = (p_0x^m + \\ + p_1x^{m-1} + \ldots + p_m)\,xe^{r_1x},$$

или, короче $z = P_m\,(x)\,xe^{r_1x}$, где $P_m\,(x)$ — многочлен степени m с неопределенными коэффициентами.

В случае же, когда α — корень характеристического многочлена для L кратности 2, т. е. $\alpha = r_1 = r_2$, уравнение имеет вид:

$$a_0 (D - r_1)^2 [y] = A_m (x) e^{r_1 x}.$$

Оператор $(D - r_1)^2$ понижает степень множителя при $e^{r_1 x}$ на 2 единицы, и потому частное решение надо искать в виде произведения $e^{r_1 x}$ на многочлен степени $m + 2$. При этом оператор $(D - r_1)^2$ обращает в нуль выражение $(p_m x + p_{m+1}) e^{r_1 x}$, и потому в частном решении можно отбросить соответствующие слагаемые. Иными словами, частное решение можно искать в виде

$$z = (p_0 x^{m+2} + \ldots + p_m x^2) e^{r_1 x} = (p_0 x^m + \ldots + p_m) x^2 e^{r_1 x},$$

или, короче, в виде $z = P_m (x) x^2 e^{r_1 x}$.

Аналогичный вид имеет частное решение в случае любого уравнения вида $L[y] = A_m (x) e^{r_1 x}$, если r_1 является одним из корней характеристического многочлена для L кратности s. Именно справедливо следующее утверждение:

Пусть число α является корнем кратности s характеристического многочлена для оператора L, а $A_m(x)$ — многочлен степени m. Тогда частное решение уравнения

$$L[y] = A_m (x) e^{\alpha x} \tag{2}$$

следует искать в виде

$$z = P_m (x) x^s e^{\alpha x}, \tag{3}$$

где $P_m (x)$ — многочлен степени m с неопределенными коэффициентами. Для нахождения этих коэффициентов надо подставить выражение (3) в уравнение (2) вместо y, сократить на $e^{\alpha x}$ и приравнять коэффициенты слева и справа при одинаковых степенях x. Из полученной системы находим искомые коэффициенты.

Замечание. В случае, когда уравнение имеет вид: $L[y] = A_m (x)$, где $L = a_0 D^n + \ldots + a_{n-s} D^s$, число 0 является корнем характеристического многочлена $a_0 r^n + \ldots + a_{n-s} r^s$, имеющим кратность s, и потому частное решение надо искать в виде $z = P_m (x) x^s$.

Пример. 1. Найдем частное решение уравнения

$$y^{(4)} + 3y''' = x^2 - 1. \tag{4}$$

Решение. Так как в правой части имеем многочлен второй степени от x, а младшая входящая в уравнение (4) производная имеет порядок 3, будем искать частное решение в виде

$$z = (p_0x^2 + p_1x + p_2)\, x^3 = p_0x^5 + p_1\, x^4 + p_2x^3.$$

Подставляя это выражение вместо y в (4), получаем:

$$(p_0x^5 + p_1x^4 + p_2x^3)^{(4)} + 3\,(p_0x^5 + p_1x^4 + p_2x^3)''' = \\ = x^2 - 1.$$

Выполняя дифференцирование и приводя подобные члены, находим:

$$120p_0x + 24p_1 + 180p_0x^2 + 72p_1x + 18p_2 = x^2 - 1.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа, получаем:

$$\begin{cases} 180p_0 = 1, \\ 120p_0 + 72p_1 = 0, \\ 24p_1 + 18p_2 = -1. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, получаем:

$$p_0 = \frac{1}{180},\ p_1 = -\frac{1}{108},\ p_2 = -\frac{7}{162}.$$

Значит,

$$z = \frac{x^5}{180} - \frac{x^4}{108} - \frac{7x^3}{162}.$$

Пример 2. Найдем общее решение уравнения

$$y'' - 6y' + 9y = 6xe^{3x}. \tag{5}$$

Решение. Сначала находим общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' - 6y' + 9y = 0$. Характеристическое уравнение имеет вид: $r^2 - 6r + 9=0$. Оно имеет корень 3 второй кратности, и потому общее решение однородного уравнения имеет вид: $Y = (C_1x + C_2)\,e^{3x}$. Найдем теперь частное решение неоднородного уравнения. Множитель при e^{3x} в правой части уравнения (5) имеет первую степень, причем коэффициент 3 при x в показателе является корнем второй кратности характеристического уравнения. Поэтому ищем частное решение в виде

$$z = (p_0x + p_1)\, x^2e^{3x} = (p_0x^3 + p_1x^2)\, e^{3x}.$$

Но тогда

$$z' = (3p_0x^2 + 2p_1x)\,e^{3x} + 3\,(p_0x^3 + p_1x^2)\,e^{3x},$$
$$z'' = (6p_0x + 2p_1)\,e^{3x} + 6\,(3p_0x^2 + 2p_1x)\,e^{3x} + 9\,(p_0x^3 + p_1x^2)\,e^{3x}.$$

Подставляя выражения z, z', z'' вместо y, y', y'' в уравнение (5) и сокращая обе части уравнения на e^{3x}, получаем после приведения подобных членов равенство

$$6p_0x + 2p_1 = 6x.$$

Из него находим: $p_1 = 0$, $p_0 = 1$. Значит, частное решение имеет вид: $z = x^3e^{3x}$, а общее решение равно сумме этого частного решения и общего решения однородного уравнения:

$$y = Y + z = (C_1 + C_2x)\,e^{3x} + x^3e^{3x}.$$

В случае, когда правая часть уравнения $L[y] = b(x)$ имеет вид:

$$b(x) = A_m(x)\,e^{\alpha_1 x} + B_s(x)\,e^{\alpha_2 x} + \ldots + D_t(x)\,e^{\alpha_t x},$$

надо найти частные решения z_1, z_2, ..., z_s уравнений

$$L[y] = A_m(x)e^{\alpha_1 x}, \quad \ldots, \quad L[y] = D_t(x)e^{\alpha_t x}$$

и сложить их (см. теорему 1 п. 4, § 1).

Пример 3. Для уравнения

$$y'' - 4y = xe^{2x} + (5x^2 + 2x)\,e^{3x}$$

частное решение имеет вид:

$$z = (p_0x + p_1)\,e^{2x}x + (q_0x^2 + q_1x + q_2)\,e^{3x}.$$

Подставляя это выражение в уравнение и сравнивая коэффициенты при одинаковых функциях слева и справа, находим значения коэффициентов: $p_0 = \frac{1}{8}$, $p_1 = -\frac{1}{16}$, $q_0 = 1$, $q_1 = -2$, $q_2 = 2$.

Значит,

$$L = \left(\frac{1}{8}x - \frac{1}{16}\right)xe^{2x} + (x^2 - 2x + 2)\,e^{3x}.$$

5. Решение неоднородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (специальные случаи, окончание). Формулы Эйлера

$$\cos\beta x = \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2},$$

$$\sin \beta x = -\frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i}$$

позволяют свести к рассмотренным выше случаям дифференциальное уравнение вида

$$L[y] = e^{\alpha x}(A(x)\cos \beta x + B(x)\sin \beta x), \qquad (1)$$

где $A(x)$ и $B(x)$ — многочлены. По этим формулам уравнение (1) записывается так:

$$L[y] = e^{\alpha x}\left(\frac{1}{2} A(x)(e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}) + \right.$$
$$\left. + \left(-\frac{i}{2}\right) B(x)(e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}) \right).$$

Преобразуя правую часть этого уравнения, получаем:

$$L[y] = C(x)\, e^{(\alpha+i\beta)x} + D(x)\, e^{(\alpha-i\beta)x}, \qquad (1')$$

где для краткости положено $C(x) = \frac{1}{2}(A(x) - iB(x))$, $D(x) = \frac{1}{2}(A(x) + iB(x))$. Если наибольшая из степеней многочленов $A(x)$ и $B(x)$ равна m, то оба многочлена $C(x)$ и $D(x)$ имеют степень m.

В силу сказанного в п. 3 частное решение уравнения (1') следует искать в виде

$$z = x^s (R_m(x)\, e^{(\alpha+i\beta)x} + T_m(x)\, e^{(\alpha-i\beta)x}), \qquad (2)$$

где $R_m(x)$ и $T_m(x)$ — многочлены степени m с неопределенными коэффициентами, а s — кратность корня $\alpha + i\beta$ для характеристического многочлена* (если $\alpha + i\beta$ не является корнем этого многочлена, то $s = 0$).

Вновь применяя формулы Эйлера:

$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x),$$
$$e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \sin \beta x),$$

записываем (2) в виде

$$z = x^s e^{\alpha x}(P_m(x)\cos \beta x + Q_m(x)\sin \beta x),$$

где для краткости положено

$$P_m(x) = R_m(x) + T_m(x), \quad Q_m(x) = i(R_m(x) - $$
$$- T_m(x)).$$

* Корень $\alpha - \beta i$ имеет ту же кратность, что и $\alpha + \beta i$.

Мы доказали, таким образом, следующее утверждение:

Частное решение уравнения

$$L[y] = e^{\alpha x}(A_m(x)\cos\beta x + B_m(x)\sin\beta x),$$

где $A_m(x)$ и $B_m(x)$ — многочлены от x, большая из степеней которых равна m, следует искать в виде

$$z = e^{\alpha x}x^s(P_m(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x). \qquad (3)$$

Здесь $P_m(x)$ и $Q_m(x)$ — многочлены степени m с неопределенными коэффициентами, а s — кратность корня $\alpha + \beta i$ характеристического многочлена для L (при этом $s = 0$, если $\alpha + \beta i$ не является корнем характеристического многочлена).

Пример 1. Найдем общее решение уравнения

$$y'' + 25y = x\cos 5x.$$

Решение. В этом уравнении $\alpha = 0$, так как $1 = e^{0x}$, $\beta = 5$, $\alpha + \beta i = 5i$, $A_m(x) = x$, т. е. $A_m(x)$ есть многочлен первой степени. Характеристическое уравнение соответствующего однородного уравнения $r^2 + 25 = 0$ имеет корнями числа $r_1 = 5i$, $r_2 = -5i$. Как видим, число $\alpha + \beta i = 5i$ является корнем характеристического уравнения. С учетом всего сказанного частное решение заданного неоднородного уравнения надо искать по формуле (3) в виде

$$z = x((p_0x + p_1)\cos 5x + (q_0x + q_1)\sin 5x),$$

или

$$z = (p_0x^2 + p_1x)\cos 5x + (q_0x^2 + q_1x)\sin 5x.$$

Далее поступаем обычным способом:

$$z'' = 2p_0\cos 5x - 10(2p_0x + p_1)\sin 5x - 25(p_0x^2 + p_1x)\cos 5x + 2q_0\sin 5x + 10(2q_0x + q_1)\cos 5x - 25(q_0x + q_1)\sin 5x.$$

Подставляем z и z'' в левую часть заданного уравнения и приводим подобные члены. Получим:

$$(20q_0x + 2p_0 + 10q_1)\cos 5x - (20p_0x + 2q_0 - 10p_1)\sin 5x = x\cos 5x.$$

Последнее равенство может выполняться тождественно только при выполнении следующих тождеств:

$$20q_0x + 2p_0 + 10q_1 = x, \quad 20p_0x + 2q_0 - 10p_1 = 0,$$

откуда $\begin{cases} 20q_0 = 1, \\ 2p_0 + 10q_1 = 0, \\ 20p_0 = 0, \\ -10p_1 + 2q_0 = 0. \end{cases}$

Из этой системы уравнений находим: $p_0 = 0$, $q_0 = \frac{1}{20}$, $p_1 = \frac{1}{100}$, $q_1 = 0$. Частное решение имеет вид:

$$z = 0{,}01x\cos 5x + \frac{1}{20}x^2 \sin 5x.$$

Запишем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$Y = C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x.$$

Общее решение заданного уравнения имеет вид:

$$y = Y + z = C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x + 0{,}01\, x \cos 5x + 0{,}05x^2 \sin 5x.$$

Пример 2. Найдем общее решение уравнения

$$y'' - 6y' + 13y = 8e^{3x} \sin 2x.$$

Решение. Напишем характеристическое уравнение соответствующего однородного уравнения $r^2 - 6r + 13 = 0$. Его корнями являются числа $r_1 = 3 + 2i$ и $r_2 = 3 - 2i$. В правой части имеем выражение, в котором $A_m(x) = 8$ — многочлен нулевой степени, $m = 0$, $\alpha = 3$, $\beta = 2$. Как видно, комплексные числа $\alpha \pm \beta i = 3 \pm 2i$ совпадают соответственно с корнями r_1 и r_2 характеристического уравнения, поэтому частное решение надо искать в виде

$$z = xe^{3x} (p_0 \cos 2x + q_0 \sin 2x).$$

Выполнив вычисления, получим для z такое выражение

$$z = -2xe^{3x} \cos 2x.$$

Запишем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$Y = e^{3x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

Сложив Y и z, получим общее решение заданного неоднородного уравнения

$$y = Y + z = e^{3x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) - 2xe^{3x} \cos 2x.$$

Пример 3. Найдем общее решение уравнения

$$y'' + 25y = 50x^2 + 29 + x\cos x. \tag{4}$$

Решение. Правую часть уравнения можно рассматривать как сумму функций $b_1(x) = 50x^2 + 29$, $b_2(x) = x\cos x$. Рассмотрим два вспомогательных уравнения:

$$\begin{cases} y'' + 25y = 50x^2 + 29, \\ y'' + 25y = x\cos x. \end{cases}$$

Так как $a_2 = 25 \neq 0$, то частное решение z_1 уравнения (4) ищем в виде многочлена второй степени: $z_1 = p_0x^2 + p_1x + p_2$. Выполнив вычисления, найдем: $z_1 = 2x^2 + 1$. Частное решение z_2 уравнения (4) было найдено в примере 1: $z_2 = \frac{x}{100}\cos 5x + \frac{x^2}{20}\sin 5x$. Поэтому функция

$$z = z_1 + z_2 = 2x^2 + 1 + 0{,}01x\cos 5x + 0{,}05x^2\sin 5x \tag{5}$$

является частным решением уравнения (4). Общее решение соответствующего однородного уравнения: $C_1\cos 5x + C_2\sin 5x$. Поэтому общим решением уравнения (4) является

$$y = Y + z = C_1\cos 5x + C_2\sin 5x + 2x^2 + 1 + 0{,}01x\cos 5x + 0{,}05x^2\sin 5x. \tag{6}$$

Пример 4. Найдем решение уравнения

$$y'' + 25y = 50x^2 + 29 + x\cos x,$$

удовлетворяющее начальному условию: $y(0) = 7$, $y'(0) = -14{,}99$.

Решение. Найдем сначала общее решение уравнения. В данном случае оно уже известно (см. (6)):

$$y' = -5C_1\sin 5x + 5C_2\cos 5x + 4x + 0{,}01\cos 5x - 0{,}05x\sin 5x + 0{,}1\sin 5x + 0{,}25x^2\cos 5x.$$

Поэтому $y(0) = C_1 + 1$, $y'(0) = 5C_2 + 0{,}01$. В силу начальных условий $C_1 + 1 = 7$, $5C_2 + 0{,}01 = -14{,}99$, откуда $C_1 = 6$, $C_2 = -3$. Искомым частным решением заданного уравнения является функция

$$y = 6\cos 5x - 3\sin 5x + 2x^2 + 1 + 0{,}01x\cos 5x + \frac{x^2}{20}\sin 5x.$$

Сводка правил отыскания частного решения линейного неоднородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в зависимости от вида правой части уравнения

№ п/п	Вид правой части	Корни характеристического уравнения	Вид частного решения уравнения
1	$A_m(x)$ — многочлен степени m	Число 0 не является корнем характеристического уравнения	$z = P_m(x)$
		Число 0 является корнем характеристического уравнения кратности s	$z = x^s P_m(x)$
2	$A_m(x)e^{\alpha x}$	Число α не является корнем характеристического уравнения	$z = P_m(x)e^{\alpha x}$
		Число α является корнем характеристического уравнения кратности s	$z = P_m(x)\ x^s e^{\alpha x}$
3	$A_m(x)\cos\beta x + B_m(x)\sin\beta x$	Числа $\pm\beta i$ не являются корнями характеристического уравнения	$z = P_m(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x$
		Числа $\pm\beta i$ являются корнями характеристического уравнения кратности s	$z = x^s (P_m(x) \times \cos\beta x + Q_m(x) \times \sin\beta x)$
4	$e^{\alpha x}(A_m(x) \times \cos\beta x + B_m(x)\sin\beta x)$	Числа $\alpha \pm \beta i$ не являются корнями характеристического уравнения	$z = e^{\alpha x}(P_m(x) \times \cos\beta x + Q_m(x) \times \sin\beta x)$
		Числа $\alpha \pm \beta i$ являются корнями характеристического уравнения кратности s	$z = e^{\alpha x}(P_m(x) \times \cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x) \times x^s$

6 Заказ 7915

Вопросы для самопроверки

1. Какое дифференциальное уравнение называется линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами?

2. Как установить линейную независимость частных решений функций $e^{r_1 x}$ и $e^{r_2 x}$, не используя вронскиан этих функций?

3. При каком значении коэффициента b_2 уравнение имеет решение $y = C$? (C — постоянная.)

4. Какой вид имеет общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае:

а) различных действительных корней характеристического уравнения;

б) различных комплексных корней;

в) кратного корня?

5. При каких видах правой части для отыскания частного решения удобно пользоваться методом неопределенных коэффициентов?

6. Правая часть в неоднородном уравнении имеет вид: а) $b(x) = a_0 x^m + \ldots + a_m$; б) $b(x) = e^{\alpha x} P_m(x)$. Когда в случае а) частное решение ищется в виде многочлена степени $m + 1$: $z = xP_m(x)$? Когда в случае б) частное решение ищется в виде $z = e^{\alpha x} x^2 P_m(x)$?

7. Почему при непрерывной правой части $b(x)$ линейного неоднородного уравнения задача Коши всегда имеет решение?

Упражнения

Найдите общее решение следующих уравнений:

32. $y'' - 4y' + 3y = 0.$
33. $y'' - 7y' + 12y = 0.$
34. $y'' - 2y' + 10y = 0.$
35. $y'' - 3y' = 0.$
36. $y'' + 4y' + 8y = 0.$
37. $y'' + 16y = 0.$
38. $y'' - 6y' + 9y = 0.$
39. $y'' + 6y' + 10y = 0.$

Найдите частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

40. $y'' - 5y' + 6y = 0,\ y(0) = \frac{1}{2},\ y'(0) = 1.$

41. $y'' + 4y = 0,\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$

42. $y'' - 6y' + 9y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2.$

43. $y'' - y = 0,\ y(0) = 7,\ y'(0) = 3.$

44. Для уравнения $y'' - 2y' = 0$ найдите интегральную кривую, которая проходит через точку $O(0; 0)$ и касается в этой точке прямой $y = 6x$.

45. Какая интегральная кривая уравнения $y'' - y' - 2y = 0$ проходит через точку $A(0; -3)$, имея в этой точке касательную, наклоненную под углом arctg 6 к оси абсцисс?

46. При каких значениях коэффициента q уравнение $y'' + qy = 0$ имеет ненулевые решения, стремящиеся к нулю, при $x \to +\infty$?

47. При каких значениях коэффициентов p и q все решения уравнения $y'' + py' + qy = 0$ ограничены на полуоси $x \geqslant 0$?

48. При каких значениях коэффициентов p и q все решения уравнения $y'' + py' + qy = 0$ являются периодическими функциями от x?

Для каждого из данных уравнений напишите вид его частного решения (числовые значения коэффициентов не находить):

49. $y'' - 15y' = x^3 - x + 1$.

50. $y'' + 9y = \cos 3x$.

51. $y'' + 2y' = e^{-8x}$.

52. $3y'' - 2y' = xe^{\frac{2}{3}x}$.

53. $y'' - 5y' + 6y = (x + 1)\, e^{2x}$.

54. $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}$.

Найдите общее решение следующих уравнений:

55. $y'' + 4y' + y = 4$.

56. $y'' + 6y' + 9y = 12e^{-3x}$.

57. $y'' - 6y' + 9y = x^2$.

58. $y'' + 4y' = 4xe^{-4x}$.

59. $y'' + 6y' - 3y = 12 \cos 3x$.

60. $y'' - y = 2x - 1 + e^{5x}$.

Найдите решения, удовлетворяющие заданным начальным условиям (задача Коши):

61. $y'' - 2y' = e^x (x^2 + x - 3)$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$.

62. $y'' - 5y' + 6y = e^{-x} (3x - 2)$, $y(0) = y'(0) = 0$.

63. $y'' - y = 3x$, $y(1) = -1$, $y'(1) = 0$.

Методом вариации постоянных найдите общее решение заданных уравнений:

64. $y'' + y = \operatorname{ctg} x$, $x \in]0; \pi[$.

65. $y'' + y = \dfrac{1}{\sqrt{\cos 2x}}$.

66. $y'' + 4y = \operatorname{ctg} 2x$.

67. Тяжелое тело скользит по шероховатой наклонной плоскости, угол наклона равен α, коэффициент трения μ. Найдите закон движения, если начальная скорость равна нулю.

68. Определите переходную кривую железнодорожного закрепления по ее дифференциальному уравнению $py'' = x$, если $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, p — постоянная.

69. Кривая свода определяется уравнением $y'' = \dfrac{y}{H}$, где H — постоянная. Найдите y, если $y(0) = q$, $y'(0) = 0$.

70. Цепь длиной 6 м сползает со стола без трения. Движение началось тогда, когда один метр цепи уже свис. За какое время сползет вся цепь?

71. По кабелю длиной l проходит ток (сила тока I, сопротивление кабеля на единицу длины R, проводимость тока утечки на единицу длины ρ). При этих условиях изменение силы тока моделируется дифференциальным уравнением $I''_{(t)} = R\rho I(t)$. Найдите силу тока на конце кабеля, если на его начале ($l = 0$) $I(0) = I_0$, $I'(0) = -\rho E_0$.

§ 3. СВОБОДНЫЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ. РЕЗОНАНС

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка находят применение при изучении различных колебательных явлений. Рассмотрим некоторые из них.

1. Колебания под действием упругой силы пружины.

Задача 1. На вертикальной пружине закреплен груз массой m. Груз выведен из положения равновесия в вертикальном направлении и затем отпущен. Найдем закон движения груза, пренебрегая массой пружины и сопротивлением воздуха.

Решение. Направим ось Ox вниз по вертикальной прямой, проходящей через точку подвеса груза, которую примем за начало координат. Составим дифференциальное уравнение движения, опираясь на второй закон Ньютона:

$$F = ma, \tag{1}$$

где m — масса груза, a — ускорение движения, F — результирующая всех сил, приложенных к грузу.

В положении равновесия сила тяжести, проекция которой на ось Ox равна mg, уравнивается упругой силой пружины, которая согласно закону Гука пропорциональна удлинению λ пружины:

$$mg = \omega^*\lambda \tag{2}$$

(здесь ω^* — коэффициент жесткости пружины). Обозначим через $x(t)$ отклонение груза от положения равновесия. Тогда в момент времени t на тело будут действовать две силы: сила тяжести mg, тянущая груз вниз, и упругая сила пружины, равная $\omega^*(\lambda + x)$ и направленная вверх. Результирующая сила будет равна:

$$F = mg - \omega^*(\lambda + x),$$

или в силу (2)

$$F = -\omega^* x.$$

На основании закона Ньютона (1) получаем:

$$ma = -\omega^* x. \tag{3}$$

В случае прямолинейного движения вдоль оси Ox ускорение равно $x''(t)$. Поэтому равенство (3) можно записать в виде $mx'' = -\omega^* x$, откуда

$$x'' + \omega^2 x = 0, \tag{4}$$

где $\omega^2 = \frac{\omega^*}{m} > 0$.

Это дифференциальное уравнение движения тела. Оно является линейным однородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

Корнями его характеристического уравнения $r^2 + \omega^2 = 0$ являются числа $r_1 = \omega i$, $r_2 = -\omega i$. Поэтому общее решение уравнения (4) имеет вид:

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t.$$

Для выяснения физического смысла полученного решения преобразуем его:

$$x = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}\cos\omega t + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}\sin\omega t\right).$$

Положим $\sqrt{C_1^2 + C_2^2} = A$. Так как $\left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}\right)^2 + \left(\frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}\right)^2 = 1$, то можно положить $\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} = \sin\alpha$, $\frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} = \cos\alpha$.

Тогда общее решение запишется так:

$$x = A\,(\sin\alpha\cos\omega t + \cos\alpha\sin\omega t),$$

или

$$x = A\sin(\omega t + \alpha), \tag{5}$$

где A и α — новые произвольные постоянные. Величина A называется *амплитудой колебания*, аргумент $\omega t + \alpha$ — *фазой колебания*, его значение α при $t = 0$ называется *начальной фазой*, ω — *частотой колебания*.

Пусть в начальный момент $t = 0$ отклонение груза от положения равновесия равно x_0, а скорость движения x'_0, т. е. $x(0) = x_0$, $x'(0) = x'_0$. По этим начальным условиям можно найти амплитуду колебания и начальную фазу.

В силу условий при $t = 0$, учитывая равенство $x'(t) = A\omega\cos(\omega t + \alpha)$, получаем: $A\sin\alpha = x_0$, $A\omega\cos\alpha = x'_0$, откуда

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{(x'_0)^2}{\omega^2}}, \quad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{\omega x_0}{x'_0}.$$

Подставив найденные значения A и α в (5), получим:

$$x = \sqrt{x_0^2 + \frac{(x'_0)^2}{\omega^2}}\sin\left(\omega t + \operatorname{arctg}\frac{\omega x_0}{x'_0}\right). \tag{5'}$$

Формула (5′) выражает закон движения груза. Из нее видно, что груз совершает гармонические колебания около положения равновесия (отсюда и название уравнения). Частота и период колебания соответственно равны: $\omega = \sqrt{\frac{\omega^*}{m}}$, $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\omega^*}}$. Как видим, частота и период колебания зависят только от жесткости пружины и массы груза. Другими словами, частота и период колебания определяются свойствами самой системы. Амплитуда же колебаний $A = \sqrt{x_0^2 + \frac{(x_0')^2}{\omega^2}}$ и начальная фаза $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{\omega x_0}{x_0'}$ зависят также от начальных условий x_0 и x_0'.

Задача 2. Найдем закон движения груза в условиях предыдущей задачи с учетом сопротивления среды, считая его пропорциональным скорости движения.

Решение. Теперь к силам, действующим на груз, прибавится сила сопротивления среды, которая равна $-k^*x'(t)$ (знак «минус» указывает на то, что сила сопротивления среды направлена противоположно скорости). Уравнение движения примет вид:

$$mx'' = -k^*x' - \omega^*x,$$

или

$$x'' + 2kx' + \omega^2 x = 0,$$

где $2k = \frac{k^*}{m}$, $\omega^2 = \frac{\omega^*}{m}$, k — *коэффициент сопротивления*. Снова получили линейное однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Корнями его характеристического уравнения $r^2 + 2kr + \omega^2 = 0$ являются числа $r_{1,2} = -k \pm \sqrt{k^2 - \omega^2}$.

Возможны три случая:

1) $k < \omega$, тогда $k^2 - \omega^2 < 0$,

$r_{1,2} = -k \pm \sqrt{-(\omega^2 - k^2)} = -k \pm i\sqrt{\omega^2 - k^2}$.

В этом случае

$$x = e^{-kt}\left(C_1 \cos\sqrt{\omega^2 - k^2}\cdot t + C_2 \sin\sqrt{\omega^2 - k^2}\cdot t\right) = \\ = Ae^{-kt}\sin\left(\sqrt{\omega^2 - k^2}\cdot t + \alpha\right).$$

Здесь $\sqrt{\omega^2 - k^2}$ — частота колебания, α — начальная фаза. Множитель Ae^{-kt} монотонно стремится к нулю при $t \to \infty$. Если задать начальные условия: $x(0) = x_0$, $x'(0) = x_0$, то можно определить A и α.

2) $k > \omega$ — коэффициент сопротивления среды больше жесткости пружины. Тогда корни r_1 и r_2 — вещественные отрицательные числа и $x = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$, где $r_1 < 0$, $r_2 < 0$.

С течением времени x стремится к нулю.

3) $k = \omega$, $r_1 = r_2 = -k$, $x = (C_1 + C_2 t) e^{-kt} = \dfrac{C_1 + C_2 t}{e^{kt}}$.

Используя правило Лопиталя, найдем:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{C_1 + C_2 t}{e^{kt}} = \lim_{t \to \infty} \frac{C_2}{ke^{kt}} = 0,$$

т. е. и в этом случае $\lim\limits_{t \to +\infty} x = 0$.

При большом сопротивлении среды (случаи 2) и 3)) получаем функции, имеющие не более одного экстремума. Поэтому при большом сопротивлении среды движение не имеет колебательного характера, а начиная с некоторого момента времени отклонение точки от положения равновесия монотонно стремится к нулю.

Видим, что при малом сопротивлении среды (случай 1)) уменьшается частота колебаний, поскольку $\sqrt{\omega^2 - k^2} < \omega$, и амплитуда этих колебаний с течением времени стремится к нулю. Такие колебания называют *затухающими гармоническими колебаниями.*

В обеих рассмотренных задачах мы не имеем внешней (возмущающей) силы. Колебания груза были вызваны действием упругой силы пружины. Такие колебания называют *свободными* или *собственными*. Если на груз будет действовать внешняя (возмущающая) сила, то возникают так называемые *вынужденные колебания.*

Задача 3. Найдем закон движения груза в условиях первой задачи, но с учетом того, что на груз действует возмущающая сила $f_1(t)$ (вынужденные колебания без сопротивления среды).

Решение. Теперь (см. задачу 1) к силам, действующим на груз, прибавится внешняя сила $f_1(t)$. Как и в задаче 1, получаем уравнение:

$$mx'' = -\omega^* x + f_1(t),$$

откуда

$$x'' + \omega^2 x = f(t), \qquad (6)$$

где

$$\omega^2 = \frac{\omega^*}{m}, \quad f(t) = \frac{f_1(t)}{m}.$$

Решив уравнение (6), найдем закон движения груза.

Уравнение (6) является линейным неоднородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами, соответствующее однородное уравнение которого совпадает с уравнением (4). Поэтому для получения общего решения неоднородного уравнения (6) остается найти только его частное решение. Вид этого решения зависит от вида правой части уравнения (6). В практике важен случай, когда возмущающая сила является синусоидальной.

Задача 4. Найдем закон движения груза в условиях задачи 3, считая внешнюю (возмущающую) силу равной $A_1^* \sin \beta t$, где A и β — постоянные.

Решение. Воспользуемся результатом решения задачи 3. Уравнение (6) теперь примет вид:

$$x'' + \omega^2 x = \frac{A_1^*}{m} \sin \beta t, \quad \text{или} \quad x'' + \omega^2 x = A_1 \sin \beta t,$$

где $A_1 = \dfrac{A_1^*}{m}$.

Соответствующим однородным уравнением является уравнение $x'' + \omega^2 x = 0$. Его общее решение x имеет вид: $x = A \sin(\omega t + \alpha)$ (см. п. 1, § 3).

Найдем частное решение неоднородного уравнения (6). Рассмотрим два случая:

1) $\omega \neq \beta$ (частота внешней силы не совпадает с частотой собственных колебаний). Частное решение z надо искать в виде

$$z = M \cos \beta t + N \sin \beta t,$$

где M и N — коэффициенты, подлежащие определению. (См. сводку правил отыскания z в § 2.) Выполнив вычисления, найдем: $M = 0$, $N = \dfrac{A_1}{\omega^2 - \beta^2}$ и, следовательно, $z = \dfrac{A_1}{\omega^2 - \beta^2} \sin \beta t$. Закон движения груза выражается общим решением уравнения (6):

$$x = X + z = A \sin(\omega t + \alpha) + \frac{A_1}{\omega^2 - \beta^2} \sin \beta t. \qquad (7)$$

Второе слагаемое в (7) определяет вынужденные колебания, вызванные внешней силой. Первое же слагаемое определяет собственные колебания, обусловленные жесткостью пружины и массой груза.

При сложении двух гармонических колебаний, имеющих различные частоты, возникают так называемые биения — амплитуда результирующего колебания периодически то увеличивается, то уменьшается. Это явление используют в радиотехнике.

2) $\omega = \beta$. Уравнение (7) примет вид:

$$x'' + \omega^2 x = A_1 \sin \omega t.$$

Теперь частное решение надо искать в виде

$$z = t\,(M \cos \omega t + N \sin \omega t).$$

В результате соответствующих вычислений получим: $M = -\frac{A_1}{2\omega}$, $N = 0$. Поэтому частное решение, определяющее колебания, имеет вид:

$$z = -\frac{A_1 t}{2\omega} \cos \omega t. \qquad (8)$$

Из (8) следует, что амплитуда вынужденных колебаний может оказаться очень большой, даже когда A_1 невелико. Это явление резкого возрастания амплитуды колебаний под влиянием даже совсем малых возмущающих (внешних) сил называют *резонансом*.

Задача 5. Найдём закон движения груза при наличии возмущающей синусоидальной силы и сопротивления среды, которое пропорционально скорости движения (вынужденные колебания в среде с сопротивлением).

Решение. Пусть возмущающая сила равна $A_1^* \sin \beta t$, $\beta \neq 0$. По условию сопротивление среды равно $k^* x'$ и направлено противоположно скорости. Задача является обобщением задач 2 и 4. Дифференциальное уравнение движения имеет вид:

$$mx'' = -\omega^* x - k^* x' + A_1^* \sin \beta t,$$

или

$$x'' + 2kx' + \omega^2 x = A_1 \sin \beta t, \qquad (9)$$

где $2k = \frac{k^*}{m}$, $\omega^2 = \frac{\omega^*}{m}$, $A_1 = \frac{A_1^*}{m}$.

В практике чаще встречается случай, когда сопротивление среды мало, т. е. $k^2 - \omega^2 < 0$.

Общее решение соответствующего однородного уравнения было найдено в задаче 2 (случай 1):

$$x = Ae^{-kt} \sin (\beta_1 t + \alpha),$$

где $\beta_1 = \sqrt{\omega^2 - k^2}$.

Частное решение неоднородного уравнения (9) ищем в виде

$$z = M \cos \beta t + N \sin \beta t.$$

Вычисления показывают, что $z = B \sin (\beta t - \gamma)$, где

$$B = \frac{A_1}{\sqrt{(\omega^2 - k^2)^2 + 4k^2\beta^2}}, \quad \gamma = \operatorname{arctg} \frac{2k\beta}{\omega^2 - k^2}.$$

Общее решение:

$$x = Ae^{-kt} \sin (\beta_1 t + \alpha) + B \sin (\beta t - \gamma). \tag{10}$$

Первое слагаемое в (10) (см. задачу 4) определяет затухающие гармонические колебания. Амплитуда вынужденных колебаний B (см. задачу 4) не зависит от времени t. Она имеет наибольшее значение при $\beta = \sqrt{\omega^2 - 2k^2}$. При этом значении β амплитуда колебаний становится равной $\frac{A_1}{2k\sqrt{\omega^2 - k^2}}$ и потому велика при малых значениях k. При этом частота вынужденных колебаний β близка к частоте собственных колебаний ω. Следовательно, когда сопротивление среды мало и частота вынужденных колебаний близка к частоте собственных колебаний, амплитуда вынужденных колебаний становится очень большой, т. е. возникает резонанс.

Явление резонанса встречается в колебаниях различных систем. При этом в одних случаях оно вредно (например, в качке мостов, перекрытий), в других — полезно (например, им пользуются в электротехнике).

2. **Колебательный контур.** Колебательным контуром называют электрическую цепь, которая состоит из конденсатора и катушки, присоединенной к обкладкам конденсатора.

Если конденсатор присоединить к батарее, то его пластины получат некоторый заряд и на его обкладках возникнет разность потенциалов. После присоединения заряженного таким образом конденсатора к катушке он начнет разряжаться и в цепи появится электрический ток. Однако сила тока благодаря явлению самоиндукции будет увеличиваться постепенно и достигнет своего наибольшего значения, когда конденсатор полностью разрядится. При этом в силу самоиндукции ток исчезнет не сразу. Постепенное уменьшение силы тока вызовет перезарядку обкладки конденсатора. Когда ток исчезнет, обкладки конденсатора окажутся перезаряженными, система вернется в исходное положение и процесс пойдет в обратном направлении. Возникнут электрические колебания.

Задача 1. Последовательно включены конденсатор емкости C, катушка с индуктивностью L. В начальный момент заряд конденсатора равен q_0, а через катушку течет ток I_0. Найти закон изменения силы тока (сопротивлением пренебречь).

Решение. Обозначим через $q(t)$ заряд конденсатора, через $I(t)$ силу тока в момент времени t. Так как $q'(t)=I(t)$, то для решения задачи достаточно найти $q(t)$.

Из электротехники известно, что если в замкнутую электрическую цепь включены источник тока с электродвижущей силой (ЭДС) E, активно сопротивление R, катушка с индуктивностью L и конденсатор емкости C, то между ЭДС и напряжением на активном сопротивлении, катушке индуктивности и конденсаторе существует такая зависимость:

$$E = U_R + U_C + U_L. \tag{1}$$

Здесь $U_R = IR$— напряжение на активном сопротивлении, $U_C = \frac{q}{C}$ — напряжение на конденсаторе и $U_L = LI'$ — напряжение на катушке индуктивности, $I(t)$ — сила тока в момент времени t, измеренная в амперах.

В колебательном контуре нет активного сопротивления R и нет источника тока, поэтому в выражении (1) $R = E(t) = 0$. Так что имеем соотношение

$$U_L + U_C = 0. \tag{1'}$$

Заметив, что

$$U_C = \frac{q}{C}, \quad U_L = LI' = Lq'',$$

после соответствующей подстановки в соотношение (1') получим дифференциальное линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами $q'' + \frac{q}{LC} = 0$ с начальными условиями $q(0) = q_0$, $q'(0) = I_0$. Корни характеристического уравнения $r^2 + \frac{1}{LC} = 0$ имеют вид: $r_{1,2} = \pm \frac{i}{\sqrt{LC}}$. Общее решение уравнения

$$q = A \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}} + \gamma\right).$$

Используя начальные условия задачи, получим решение уравнения (1′), удовлетворяющее начальным уловиям:

$$q = \sqrt{q_0^2 + I_0^2 LC} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}} + \operatorname{arctg}\frac{q_0}{I_0\sqrt{LC}}\right). \qquad (2)$$

Продифференцировав (2), найдем силу тока в цепи:

$$I = \sqrt{\frac{q_0}{LC} + I_0^2} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}} + \operatorname{arctg}\frac{q_0}{I_0\sqrt{LC}}\right). \qquad (3)$$

Из формулы (3) видно, что I меняется периодически, т. е. в цепи будут происходить электрические колебания с частотой $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ и периодом $T = 2\pi\sqrt{LC}$. Замечаем, что частота и период колебаний не зависят от начальных условий, а определяются параметрами электрической цепи: индуктивностью катушки и емкостью конденсатора.

Мы рассмотрели задачи на колебания, решение которых привело нас к линейным уравнениям второго порядка. Уравнения этого вида возникают при рассмотрении многих других колебательных явлений: колебаний антенны, рессоры, качки корабля и т. д.

Вопросы для самопроверки

1. Каким уравнением второго порядка моделируются свободные (чистые) гармонические колебания? Напишите его общее решение.
2. Каким уравнением моделируются колебания груза в среде с сопротивлением?
3. Когда возникают затухающие гармонические колебания? Чему равны амплитуда и частота этих колебаний?
4. Какое явление называется резонансом?
5. В каких из рассмотренных задач амплитуда и частота колеба-

ний не зависят от начальных условий? Чем определяются значения в этих задачах?

6. Какой вид имеет дифференциальное уравнение колебаний маятника при малых отклонениях от положения равновесия?

Упражнения

Найдите закон прямолинейного движения $s = f(t)$ при заданном ускорении движения и заданных начальных условиях:

72. $s'' = -4s$, $s(0) = 0$, $s'(0) = 10$.

73. $s'' = -4s$, $s(0) = 8$, $s'(0) = 0$.

74. $s'' = -4s$, $s(0) = 2$, $s'(0) = 10$.

75. $s'' = -2s' - 5s$, $s(0) = 5$, $s'(0) = 5$.

76. Материальная точка движется прямолинейно с ускорением $s'' = -4s + 3\sin t$. Найдите закон движения, если в начальный момент $s(0) = s'(0) = 0$. Имеет ли место резонанс при этом движении?

77. Материальная точка единичной массы движется по оси Ox под действием силы $F = 4x$, притягивающей ее к началу координат, и возмущающей силы, направленной по оси Ox и равной $f(t)$. Найдите закон движения этой точки, если возмущающая сила равна:

а) $f(t) = b\sin\sqrt{2t}$; б) $f(t) = 4\sin 2t$.

§ 4. НЕКОТОРЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1. **Введение.** До сих пор мы рассматривали лишь обыкновенные дифференциальные уравнения, т. е. дифференциальные уравнения, в которых искомая функция зависит только от одного аргумента. Но функции, встречающиеся в приложениях, обычно зависят от многих переменных.

Пример 1. Отклонение u точки колеблющейся струны от положения равновесия является функцией двух переменных — координаты x этой точки и момента времени t, $u = u(x, t)$. Если выбрать начало координат в левом конце струны и обозначить длину струны через l, то при условии, что струна закреплена на концах, функция $u(x, t)$ должна удовлетворять условиям $u(0, t) = u(l, t) = 0$. Эти условия называют *краевыми* или, иначе, *граничными, условиями*. Скорость колебания точки $M(x)$ в момент времени t равна частной производной* $u'_t(x, t)$ (поскольку координата x не меняется, а скорость равна производной отклонения u по времени). Из физических соображений ясно, что процесс колебаний струны однозначно определяется начальным отклонением от положения равновесия

* Через $u'_t(x, t)$ мы обозначаем значение $\frac{\partial u}{\partial t}$ при заданных значениях x и t.

и начальной скоростью точек струны, т. е. функциями $f(x) = u(x, 0)$ и $F(x) = u'_t(x, 0)$. Задание функций $f(x)$ и $F(x)$ называют *начальными условиями*.

Пример 2. При поперечных колебаниях мембраны отклонение u точки от положения равновесия является уже функцией от трех переменных: координат x, y этой точки и момента времени t, $u = u(x, y, t)$. Если мембрана закреплена вдоль своей границы Γ, то при любых x и y, таких, что точка $M(x; y)$ принадлежит Γ, должно выполняться условие $u(x, y, t) = 0$. Это является краевым условием в данном случае. А начальные условия имеют вид: $u(x, y, 0) = f(x, y)$ и $u'_t(x, y, 0) = F(x, y)$.

Пример 3. Рассмотрим металлический стержень длиной l, температура которого в разных точках различна. Тогда с течением времени будет происходить перераспределение температуры вдоль стержня, и потому температура точки $M(x)$ в момент времени t является функцией двух переменных: $T = T(x, t)$. Начальное распределение температуры задается функцией $f(x) = T(x, 0)$. Для однозначного определения процесса распространения тепла надо еще знать условия на концах стержня (мы считаем, что боковая поверхность стержня теплоизолирована). Если, например, левый конец стержня поддерживается при температуре T_1, а правый — при температуре T_2, то должны выполняться краевые условия: $T(0, t) = T_1$, $T(l, t) = T_2$.

Пример 4. Процесс теплопередачи в металлической пластинке описывается уже функцией трех переменных $T = T(x, y, t)$. Здесь начальное условие имеет вид: $T(x, y, 0) = f(x, y)$ (задана начальная температура каждой точки), а краевым условием является, например, задание температуры в каждой точке границы Γ данной пластинки, поддерживаемой в течение всего процесса.

Пример 5. Зададим в пространстве некоторое распределение электрических зарядов. Возникающее при этом электрическое поле описывается своим потенциалом V, который зависит от трех переменных — координат точки: $V = V(x, y, z)$. Если окружить заряды электропроводящей поверхностью Ω, то потенциал на ней будет равен нулю. Это задает краевое условие для потенциала. Начальные условия в случае постоянного поля роли не играют.

Для описания указанных выше процессов и явлений надо уметь по заданным начальным и краевым условиям находить функции, описывающие данные процессы (u, T, V и т. д.). Это оказывается возможным, так как такие функции удовлетворяют определенным дифференциальным уравнениям. Поскольку функции зависят от нескольких переменных, то эти дифференциальные уравнения содержат не обыкновенные производные, а частные, и потому их называют *дифференциальными уравнениями в частных производных*. При этом в задачах математической физики чаще всего встречаются дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка (т. е. содержащие частные производные до второго порядка включительно). Поэтому принято называть дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка *уравнениями математической физики*. В этом параграфе мы выведем уравнение колебаний струны и покажем один из методов решения этого уравнения.

2. **Вывод уравнения колебаний струны.** Так называемая идеальная струна является результатом абстракции. Мы отвлекаемся от двух измерений струны (ширины и высоты), которые считаем бесконечно малыми по сравнению с третьим измерением (длиной), а струну — абсолютно гибкой. Иными словами, предполагается, что струна не оказывает никакого сопротивления изменению ее формы (изгибу), а работает только на растяжение. Пусть струна имеет длину l и в прямолинейном положении занимает отрезок $[0; l]$ оси x. Будем считать, что к концам струны приложены вдоль оси x силы натяжения T, равные по величине, но противоположные по направлению, и что концы струны закреплены.

Сделаем еще два упрощающих предположения относительно рассматриваемых колебаний. Именно будем считать, что все точки струны движутся перпендикулярно оси Ox в одной плоскости и что эти колебания малы: наконец, предположим, что струна однородна.

Условие малости колебания означает точнее следующее. Так как струна колеблется в одной плоскости, то закон ее колебаний задается одной функцией от двух переменных $u = u(x, t)$, где u—отклонение точки с абсциссой x в момент времени t (рис. 23). По формуле длины дуги мы получаем, что длина дуги в момент времени t равна:

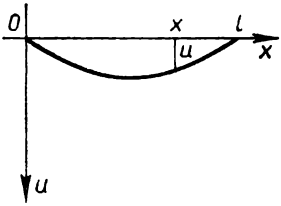

Рис. 23

$$l(t)=\int_0^l \sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\,dx.$$

Пусть отклонение $u(x, t)$ мало. Если струна достаточно гладкая, то и производная $\frac{\partial u}{\partial x}$ (тангенс угла наклона струны в точке x в момент времени t) тоже мала. Квадрат этой производной — малая высшего порядка. Мы предположим, что отклонения струны настолько малы, что можно пренебречь этим квадратом. При этом получим, что длина струны равна $\int_0^l dx = l$. Таким образом, при малых колебаниях струны ее длину можно считать неизменной. Не меняет своей длины и любой отрезок струны.

Из сделанных предположений о характере колебаний вытекают еще следующие выводы: поскольку длина отрезков струны не меняется, то натяжение во всех ее точках одно и то же и равно T. Далее заметим, что $\frac{\partial u}{\partial x} = \operatorname{tg} \alpha$, где α — угол наклона касательной к струне в точке x в момент времени t. Поэтому

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}}.$$

Так как мы предположили, что величиной $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$ можно пренебречь, то во всех точках струны с точностью до малых второго порядка $\cos\alpha = 1$. Но тогда во всех точках струны имеем (с точностью до малых высшего порядка):

$$\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha\cos\alpha = \frac{\partial u}{\partial x}. \qquad (1)$$

Перейдем теперь к выводу уравнения колебаний струны — уравнения, которому удовлетворяет функция $u(x, t)$. Для этого рассмотрим отрезок струны, лежащий между точками x и $x + \Delta x$. Обозначим линейную плотность струны через ρ. (Мы предполагаем, что струна однородна и потому ее плотность постоянна.) Тогда масса этого отрезка струны равна $\rho\Delta x$. На отрезок струны действуют силы натяжения, приложенные в его концах. Эти силы по величине равны натяжению T на концах.

Горизонтальная составляющая равнодействующей этих сил равна нулю. В самом деле, если угол наклона касательной в точке x равен α_1, а угол наклона касательной в точке $x+\Delta x$ равен α_2, то горизонтальная составляющая равна:

$$F_{\text{гор}} = -T\cos\alpha_1 + T\cos\alpha_2.$$

Но мы предположили, что во всех точках струны можно (с точностью до малых второго порядка) считать $\cos\alpha = 1$. Поэтому $F_{\text{гор}} = 0$.

Вертикальная составляющая равнодействующей дается формулой

$$F_{\text{верт}} = -T\sin\alpha_1 + T\sin\alpha_2.$$

Имеем:

$$\sin\alpha_1 = u'_x(x, t) \text{ и } \sin\alpha_2 = u'_x(x+\Delta x, t).$$

Поэтому $F_{\text{верт}} = T(u'_x(x+\Delta x, t) - u'_x(x, t))$.

По теореме Лагранжа

$$F_{\text{верт}} = T(u'_x(x+\Delta x, t) - u'_x(x, t)) = Tu''_{xx}(c, t)\Delta x,$$

где c — точка, лежащая между x и $x+\Delta x$. Но по второму закону Ньютона сила равна массе, умноженной на ускорение: $F = m\cdot a$.

Ускорение струны в точке с абсциссой x есть вторая производная отклонения по времени: $a = u''_{tt}(x, t)$. Подставляя это значение вместо a, значение $\rho\Delta x$ вместо m и значение $Tu''_{xx}(c, t)\Delta x$ вместо силы F, получим:

$$Tu''_{xx}(c, t)\Delta x = \rho u''_{tt}(x, t)\Delta x.$$

Сократим это равенство на Δx и устремим Δx к нулю. При этом точка c будет приближаться к x, и мы получим:

$$Tu''_{xx}(x, t) = \rho u''_{tt}(x, t). \tag{2}$$

Разделим обе части этого уравнения на ρ и обозначим $\frac{T}{\rho}$ через a^2 (не надо путать это a с введенным ранее обозначением ускорения). Тогда уравнение (2) примет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{3}$$

Уравнение (3) и называется *уравнением свободных колебаний струны.*

Если на струну действует сила, вызывающая колебания этой струны, и если в момент времени t линейная плотность силы в точке x равна $\Phi(x, t)$ т. е. если на отрезок от x до $x+\Delta x$ действует сила $\Phi(c, t)\,\Delta x$ $(x \leqslant c \leqslant x+\Delta x)$, то уравнение (3) надо заменить уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho}\Phi(x, t). \tag{4}$$

Это уравнение называется *уравнением вынужденных колебаний струны.*

Аналогично выводится уравнение теплопроводности для стержня. Оно имеет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

где $a^2 = \frac{ck}{\rho}$. Здесь k — коэффициент теплопроводности, c — удельная теплоемкость материала, из которого сделан стержень, и ρ — линейная плотность стержня.

Для потенциала дифференциальное уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{4\pi\rho}{\varepsilon},$$

где $\rho(x, y, z)$ — плотность заряда в точке $M(x; y; z)$, ε — диэлектрическая постоянная среды. Мы не будем выводить эти уравнения.

3. **Решение уравнения колебаний струны методом Даламбера.** Мы доказали, что уравнение колебаний струны имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1}$$

Чтобы упростить задачу и не рассматривать граничные условия, будем считать, что струна бесконечна в обе стороны. Тогда ее колебания однозначно определяются заданием начальных условий:

$$u(x, 0) = f(x), \quad u'_t(x, 0) = F(x). \tag{2}$$

Итак, нам надо найти решение дифференциального уравнения (1), определенное для всех x и t и удовлетворяющее начальному условию (2). С этой целью сделаем замену переменных, а именно положим

$$x + at = \xi, \quad x - at = \eta,$$

т. е.

$$x = \frac{1}{2}(\xi + \eta), \quad y = \frac{1}{2a}(\xi - \eta).$$

В силу правила дифференцирования композиции функций нескольких переменных получаем, что

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial \xi} = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2a}\frac{\partial u}{\partial t},$$

и потому*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\frac{\partial t}{\partial \eta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}\right) - \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{1}{2a}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{4a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Иными словами, $4a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Следовательно, уравнение (1) принимает в новых переменных следующий вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \tag{3}$$

Теперь его уже легко решить. Обозначим $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ через V. Уравнение (3) означает, что $\frac{\partial V}{\partial \xi} = 0$, т. е. V не зависит от ξ, однако V может зависеть от η. Итак, $V = \chi(\eta)$, где χ — произвольная функция от η. Поскольку $V = \frac{\partial u}{\partial \eta}$, получаем для отыскания u уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \chi(\eta).$$

Если ψ — одна из первообразных для функции χ, то получаем, что $u = \psi(\eta) + C$. При этом произвольная по-

* Напомним, что $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}$.

стоянная C не зависит от η, но может зависеть от ξ, $C = \varphi(\xi)$. Значит, мы получили для u выражение вида $u = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$.

Подставляя в это выражение значения φ и ψ, получаем:

$$u = \varphi(x + at) + \psi(x - at). \qquad (4)$$

Мы доказали следующее утверждение:

Любое решение дифференциального уравнения (*1*) *имеет вид* (*4*), *где* φ *и* ψ — *произвольные функции одной переменной.*

Наличие произвольных функций в полученном решении вообще характерно для дифференциальных уравнений в частных производных.

Замечание. Для того чтобы функция (4) удовлетворяла дифференциальному уравнению (1), функции φ и ψ должны иметь вторые производные. В некоторых случаях приходится рассматривать обобщенные решения уравнений колебаний струны, имеющие вид (4), но для которых функции φ и ψ не являются дважды дифференцируемыми. Академик С. Л. Соболев исследовал такие решения, положив тем самым основы важного раздела современной математики — теории обобщенных функций.

Чтобы получить решение уравнения (1) при заданных начальных условиях (2), надо подобрать функции φ и ψ так, чтобы выполнялись эти условия. Но из (4) следует, что

$$u'_t(x, t) = a\varphi'(x + at) - a\psi'(x - at)$$

и потому

$$u(x, 0) = \varphi(x) + \psi(x),$$
$$u'_t(x, 0) = a\varphi'(x) - a\psi'(x).$$

Итак, для отыскания φ и ψ получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \varphi(x) + \psi(x) = f(x), \\ a\varphi'(x) - a\psi'(x) = F(x). \end{cases}$$

Дифференцируя первое уравнение этой системы, получаем, что $\varphi'(x) + \psi'(x) = f'(x)$. Из системы уравнений

$$\begin{cases} \varphi'(x) + \psi'(x) = f'(x), \\ \varphi'(x) - \psi'(x) = \dfrac{1}{a} F(x) \end{cases}$$

находим, что

$$\varphi'(x)=\frac{1}{2}\left(f'(x)+\frac{1}{a}F(x)\right),\quad \psi'(x)=\frac{1}{2}\left(f'(x)-\frac{1}{a}F(x)\right).$$

Отсюда путем интегрирования от 0 до p (соответственно q) получаем, что

$$\varphi(p)-\varphi(0)=\frac{1}{2}(f(p)-f(0))+\frac{1}{2a}\int_0^p F(x)\,dx,$$

$$\psi(q)-\psi(0)=\frac{1}{2}(f(q)-f(0))-\frac{1}{2a}\int_0^q F(x)\,dx.$$

Значения $\varphi(0)$ и $\psi(0)$ связаны условием: $\varphi(0)+\psi(0)=f(0)$, которое вытекает из равенства $\varphi(x)+\psi(x)=f(x)$.

Заменяя в полученных выражениях p и q на $x+at$ и $x-at$ соответственно и складывая получившиеся равенства, выводим, что

$$u=\varphi(x+at)+\psi(x-at)=\varphi(0)+\psi(0)+\frac{1}{2}(f(x+at)+$$
$$+f(x-at))-f(0)+\frac{1}{2a}\left(\int_0^{x+at}F(x)\,dx-\int_0^{x-at}F(x)\,dx\right).$$

Поскольку $\varphi(0)+\psi(0)=f(0)$, а $\int_0^{x-at}F(x)\,dx=-\int_{x-at}^0 F(x)dx$, получаем:

$$u=\frac{1}{2}(f(x+at)+f(x-at))+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}F(x)\,dx. \qquad (5)$$

Пример 1. Решим уравнение (1) при начальных условиях:

$$u(x,0)=e^{-x^2},\quad u'_t(x,0)=0.$$

Решение. Из формулы (5) следует, что

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left(e^{-(x+at)^2}+e^{-(x-at)^2}\right).$$

Пример 2. Решим уравнение (1) при начальных условиях:

$$u(x,0)=0,\quad u'_t(x,0)=xe^{-x^2}.$$

Р е ш е н и е. Из формулы (5) получаем, что

$$u(x, t) = \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{4a}e^{-x^2}\Big|_{x-at}^{x+at} =$$

$$= \frac{1}{4a}\left(e^{-(x-at)^2} - e^{-(x+at)^2}\right).$$

В заключение остановимся на решении уравнения колебаний струны, имеющей конечную длину. В этом случае, кроме начальных условий, надо задать краевые условия. Пусть они имеют вид: $u(0, t) = u(l, t) = 0$ (т. е. пусть струна закреплена на концах). Начальные условия задаются лишь на отрезке $[0; l]$:

$$u(x, 0) = f(x),\ u'_t(x, 0) = F(x),\ 0 \leqslant x \leqslant l.$$

Для простоты ограничимся случаем, когда начальная скорость равна нулю: $F(x) \equiv 0$.

Сведем рассматриваемую задачу к случаю бесконечной струны. Для этого продолжим функцию f сначала нечетным образом на отрезок $[-l; 0]$, а потом периодически на всю ось с периодом $2l$ и решим задачу о колебании бесконечной струны с начальным условием $u(x, 0) = f(x)$ для всех x. Это решение имеет вид:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x + at) + f(x - at)).$$

Легко доказать, что оно при всех значениях x $(0 \leqslant x \leqslant l)$ удовлетворяет начальному условию $u(x, 0) = f(x)$, а при всех значениях t — краевым условиям: $u(0, t) = u(l; t) = 0$.

Случай, когда $F(x) \neq 0$, рассматривается аналогично.

ОТВЕТЫ

Глава I

1. Является. **2.** Не является. **3.** Не является. **4.** Является. **5.** Является. **6.** Не является. **7.** Является. **12.** ω—целое число. **13.** Не является. **14.** Не является. **15.** Является. **16.** Является. **17.** Является. **18.** $\frac{1}{12}\ln\frac{3y-2}{3y+2} = x + C$. **19.** $y = e^{Cx}$. **20.** $y = C\sin x - 1$. **21.** $y = \frac{C-x}{1+Cx}$. **22.** $y = a + \frac{Cx}{1+ax}$. **23.** $1 + e^y = C(1+x^2)$. **24.** $y = C\sqrt{1+e^{2x}}$. **25.** $(1+x^2)(1+y^2) = Cx^2$. **26.** $y = \sqrt[3]{C + 3x - 3x^2}$. **27.** $2e^{y^2/2} = \sqrt{e}(1+e^x)$. **28.** $y = e^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$. **29.** $y^2 - 1 = 2\ln\frac{e^x+1}{e+1}$. **30.** $y = (x\ln x - x + 1)^2$. **31.** $y = \ln x$. **32.** $e^y = \frac{e}{4}(x + 2y + 2) + C$. **33.** $\operatorname{arctg}(x+y) = x + C$. **34.** $(x+2y)^2 + 2y = 2x + C$. **35.** $y = x - \frac{1}{x+C}$. **36.** $x + y = a\operatorname{tg}\left(C + \frac{y}{a}\right)$. **37.** $x + 2y - \frac{2}{5}\ln|5x - 15y + 2| = C$. **38.** $ye^{xy} = Cx$. **39.** Нелинейное. **40.** Линейное. **41.** Нелинейное. **42.** Линейное. **43.** Нелинейное. **44.** Линейное. **45.** $y = Ce^{4x} - \frac{1}{2}e^{2x}$. **46.** $y = Ce^{-x} + x + 1$. **47.** $y = 2x\ln x + Cx$. **48.** $y = Ce^{-x} + (x-1)^2$. **49.** $x = Ce^{-y} + e^y$. **50.** $y = \frac{C}{\cos x} + \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$. **51.** $y = (x^2 + C)e^{-x^2}$. **52.** $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{C}{x^2}$. **53.** $y = Ce^{-x} + \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)$. **54.** а) $y = 2e^{-\sin x} + \sin x - 1$; б) $y = 4e^{-\sin x} + \sin x - 1$. **55.** $y = \frac{1}{x}(e^x + ab - e^a)$. **56.** Не существует. **57.** $y = 1$. **58.** $y = \frac{x}{\cos x}$. **59.** $y = \cos\sqrt{x}$. **60.** $y = e^{\sin x}$. **61.** $y = \frac{\sin x}{x}$. **63.** $2 = y^2(Ce^{2x^2} + 2x^2 + 1)$. **64.** $y = x^4\ln^2 Cx$. **65.** $y(e^x + Ce^{2x}) = 1$. **66.** $y(Ce^{-x} + x) = 1$. **67.** $x^2 + 2xy - y^2 = C$. **68.** $x^2 - 3xy + 2y^2 =$

$= C\left(\frac{x-y}{x-2y}\right)^5$. **69.** $y = \frac{1}{2C}(x^2 - C^2)$. **70.** $y = \frac{4x}{\ln|x| + C}$. **71.** $x + ye^{\frac{x}{y}} = 2$. **72.** Является. **73.** Не является. **74.** Является. **75.** $ye^x - xe^y = C$. **76.** $x^3e^y - y = C$. **77.** $\frac{\sin^2 x}{y} + \frac{x^2+y^2}{2} = C$. **78.** $y + xe^{-y} = C$. **79.** $x \sin xy = C$; $x \sin xy = 1$. **80.** $\ln(x+y) - \frac{x}{x+y} = C$. **81.** $x^2 + y^2 = Cx^3$. **82.** $x^2 \cos 2y + 2x = C$. **83.** $\frac{(y-1)(x-1)}{(y+1)(x+1)} = C$; $y = \pm 1$. **84.** $y^2 + 2x^2 = C\sqrt{x^2+y^2}$; $C > 0$. **85.** $y = C\cos x + \sin x$. **86.** $x(2y^2 - x) = C$. **87.** $\frac{x^7}{7} - \frac{x^3}{3y^3} = C$; $y = 0$. **88.** $(x+1)^2 - (y-1)^2 = C$. **89.** $y^a x^{2a} = Ce^y$; $y = 0$. **90.** $y = C\sqrt{a^2 - x^2}$; $C > 0$, $y = \pm a$. **91.** $y = Ce^{\frac{y}{x}}$; $y = 0$. **92.** $y = Ce^{-x} + x^2$. **93.** $2 = (xy - 1)\ln Cx$; $xy = 1$. **94.** $x^2 = y^2 \ln \frac{Cy^2}{x}$; $y = 0$. **95.** $\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) = C$. **96.** $y = Cx + x\sin x$. **97.** $\frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + \operatorname{arctg} y = C$. **98.** $y = Cx - x^2 - 2x - 2$. **99.** $y^2 = x^2 - 2x + C$. **100.** $y = \frac{1}{2}\ln|1 - x^2| + 1$. **101.** $y^2 + xy + x^2 = C$. **102.** $x = (C - y)e^y$. **103.** $-\frac{1}{x} - xy + \frac{y^2}{2} = C$. **104.** $x^2\cos^2 y + y^2 = C$. **105.** $\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) - \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = C$. **106.** $\sqrt{x^2+y^2} + \frac{y}{x} = C$. **107.** $y \sin x - \frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2} = C$. **108.** $\frac{3y-2}{3y+2} = 5e^{2x}$. **109.** $y^2 + 4x^2 = C$. **110.** $x^3 + xy^2 + 2ay = C$. **111.** $yx^2 + 2y^2x - 3x^3 = C$. **112.** $x\sin y + y\cos x - e^y = C$. **113.** $y^3 = 2x + C$. **114.** $y = 3x^2$. **115.** $xy = 6$. **116.** $xy = 8$. **117.** $xy = C$. **118.** $xy = C$; $x + y = C$. **119.** $y = 2x^3$. **120.** $x^2 - y^2 = C^2$. **121.** $xy = C$; $y = Cx$. **122.** $\ln(x^2+y^2) = 2\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + C$. **123.** $y = C(x-y)^2$. **124.** $kx - \sqrt{x^2+y^2} = C$. **125.** $y = C\sqrt{x}$, $y' > 0$; $y = \frac{C}{\sqrt{x}}$, $y' < 0$. **126.** $y = \sqrt[3]{x}$. **127.** Через $\frac{60\ln 10}{\ln 2}$ дней. **128.** $\frac{\ln 10}{\ln 2}$ лет. **129.** 62 500. **130.** 8 ч. **131.** $\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$. **132.** $\frac{\ln 0,75}{\ln 0,99}$ м $\approx 0,035$ м. **133.** ≈ 247 м. **134.** $s = kl\left(P_2 + \frac{P_1}{2}\right)$. **135.** $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2g} \cdot 0,054}$ с. **136.** 35,2 с. **137.** $5e^{-3}$ кг. **138.** $\frac{8}{25}$ м/с. **139.** $2\ln\frac{5}{2}$ с. **140.** $5\frac{\ln 36}{\ln 9/2}$ мин. **141.** $\frac{c_1c_2\left(1 - e^{k(c_2-c_1)t}\right)}{c_1 - c_2e^{-k(c_2-c_1)t}}$ моль, k —

коэффициент пропорциональности. 142. Дифференциальное уравнение имеет вид: $y' = k_1 (c_1 - y)(c_2 - y)(ky + c)$, где k_1 — коэффициент пропорциональности, зависящий от катализатора. 143. Дифференциальное уравнение имеет вид: $y' = k_1 (c_1 - y)(c_2 - y)(k(c_1 - y) + c)$. 144. $x = \frac{ka}{k_1 a + (k - k_1 a) e^{kt}}$, где k и k_1 — коэффициенты пропорциональности. 145. $t = -200 \ln 0{,}05$ с. 147. $\frac{a\left(v_0 - a \operatorname{tg}\frac{akt}{m}\right)}{a + v_0 \operatorname{tg}\frac{akt}{m}}$, где $a = \sqrt{\frac{mg}{k}}$, если $t \leqslant \frac{m}{k} \operatorname{arctg}\frac{v_0}{a}$; $v = a \operatorname{th}\frac{akt}{m}$, если $t \geqslant \frac{m}{k} \operatorname{arctg}\frac{v_0}{a}$. 148. $A(t) = A_0 e^{-k_1 t}$, $B(t) = \frac{A_0 k_1}{k_2 - k_1}(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t})$, где k_1 и k_2 — коэффициенты радиоактивного распада веществ A и B. 149. $I(t) = \left(I_0 + \frac{E_0 L\omega}{R^2 + \omega^2 L^2}\right) e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_0 (R \sin \omega t - \omega L \cos \omega t)}{R^2 + \omega^2 L^2}$. 150. $xy = Cy^2 + a^2$. 151. $y = Cx^{\frac{1-k}{k}}$, где k — коэффициент пропорциональности. 152. $y = \frac{C}{x^3} e^{-\frac{1}{x}}$. 153. $y' = \frac{3y}{x}$. 154. $y' = x^{-1}\sqrt{1 - y^2} \arcsin y$. 155. $y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$. 156. $(y')^2 + xy' - y = 0$. 157. $(1 - x^2)(y')^2 = x^3$. 158. $2xy\, y' + x^2 - y^2 = 0$. 159. $y' = \frac{2(y + \sqrt{y})}{x}$. 160. $(y - 1)^2 (y')^2 + (y - 1)^2 = 1$. 161. а) $x^2 + y^2 = C^2$; б) $y - 2 = C(x - 1)$; в) $y = -2Cx + C^2$. 162. $y = \sin 3x + x^3 + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$. 163. $y = (1 + C_1^2) \ln (x + C_1) - C_1 x + C_2$. 164. $x^2 + y^2 + C_1 x + C_2 y + C_3 = 0$. 165. $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{2x}$. 166. $y = e^x (x - 1) + C_1 x^2 + C_2$. 167. $y = e^{-x}$. 168. $y = \frac{1}{C_1} + \frac{C_1}{4}(x + C_2)^2$; $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x + 1)^2$. 169. $y = \frac{1}{2C_1}(e^{C_1 (x - C_2)} + e^{-C_1 (x - C_2)})$. 170. $s = \frac{m^2 g}{k^2}(e^{-\frac{k}{m}t} - 1) + \frac{mg}{k}t$, где m — масса тела, k — коэффициент пропорциональности. 171. $s = \frac{gt^2}{2}(\sin\alpha - k\cos\alpha)$. 172. $v_0 \geqslant \sqrt{\frac{2GM}{x_0}} = \sqrt{2ax_0}$, где G — гравитационная постоянная. 173. $x = x_0 + \frac{m}{2k}\ln\left(1 - \cos\sqrt{\frac{kg}{m}}\, t\right)$, где k — коэффициент пропорциональности. 174. $\frac{\pi a\sqrt{a}}{2k\sqrt{2}}$. 175. $y = a \operatorname{ch}\frac{kx}{v_0}$. 177. $xy'' - (4x + 1)y' - (2x^3 - 3x - 3)y = 0$.

1. $\operatorname{arctg}\frac{7}{13}$. 2. Окружность $(x-1)^2+(y+4)^2=1$. 9. $A\left(\frac{16}{5};\ \frac{8}{5}\right)$. 10. $A_1(2;\ 3)$, $A_2(3;\ 2)$, $A_3(-2;\ -3)$, $A_4(-3;\ -2)$. 11. $A_1(1;\ 3)$, $A_2(3;\ 1)$. 12. $A_1(2;\ 3)$, $A_2(3;\ 2)$. 13. $A_1(2;\ 3)$, $A_2(3;\ 2)$. 14. $A_1(5;\ 2)$, $A_2(2;\ 5)$, $A_3(-2+\sqrt{5};\ -2-\sqrt{5})$, $A_4(-2-\sqrt{5};\ -2+\sqrt{5})$. 15. $y=\frac{9}{1+x^2}$. 16. $y=\pm 2e^{-x}$. 17. $y=\frac{1}{\sin^2 x}$. 18. $y=\frac{4x}{3x-4}$. 19. $y=\ln\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}$. 20. $y^3+x^2y+x=0$. 21. $y=-x^3-3x^2$. 22. $3y^5+3xy^2+1=0$. 23. $(1;\ -25;\ -1)$. 28. $y+x>0$ и $y+x<0$. 29. $y>0$ и $y<0$. 30. $y_1=(x-1)^2$; $y_2=\frac{(x-1)^5}{5}+x^2-x+\frac{6}{5}$. 31. $y_1=1+x$; $y_2=1+x+\frac{x^2}{2!}$; $y_3=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{n!}$; $y_n=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$; $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=e^x$. 32. $y_1=\frac{1-x}{2}+\sin x$; $y_2=-\frac{1}{2}-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\sin x+\cos x$; $y_3=-\frac{1}{2}+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{12}+\cos x$; $y(0,5)\approx 0,703$. 39. $y=1+x+\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{6}x^3+\frac{5}{4}x^4+\ldots$. 40. $y=0,1\left(1+x+x^2+\frac{5}{6}x^3+\frac{5}{8}x^4+\ldots\right)$. 42. $x_0=\frac{5}{2}$; $x_0=1$; $x_0=-1$; $y_0=x_0$; $y_0=-x_0$. 43. $x_0^2+y_0^2=16$. 44. $y_0'=0$. 45. $y=x^2$. 46. $x^2+2y^2=51$. 47. $xy=6$. 48. $y=2\cos x$. 49. $y'(1)=3$, $y''(1)=4$. 50. $y'''(0)=4$, $y^{(4)}(0)=14$. 51. $y=-2\sqrt{1-x^2}+3$. Нельзя. 52. $y_1=-2x^3$; $y_2=-2x^3+4$. 53. $x-\frac{3}{4}=\frac{1}{y}$. 54. $y_1=2\sqrt{x}-4$; $y_2=2\sqrt{x}-1$. 55. $y_1=x^2+x+3$; $y_2=-x^2-x+1$. Указание. Рассмотрите случаи: $2x+1\geqslant 0$ и $2x+1<0$. 56. $y_1=\sin 2x+1$; $y_2=\sin 2x$. 57. $y_1=2x+\sin 2x-\pi$; $y_2=2x+\sin 2x+2$. 58. В любом прямоугольнике, не пересекающем оси абсцисс, стороны которого параллельны осям координат.

59. В любом прямоугольнике, стороны которого параллельны осям координат. 60. См. 59. 61. См. 59. 67. $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$. 68. $y=2x$. 69. $xy=0$. 70. $y^2=4x^2$. 71. $y=-\sqrt{1-x^2}$. 72. $x+y=0$. 73. $y(y-1)=0$. 74. $y=0$. 75. $x+y=0$. 76. $y=\pm 1$. 77. Особых решений нет. 78. $y(y-1)=0$. 79. $y=Cx+\frac{1}{C}$; особое решение: $y^2=4x$. 80. $y^2(1-y)=(x-C)^2$; особых решений нет. 81. $x^2=2C(y-2C)$; особое решение: $y^2=4x^2$. 82. $\left(\frac{x^2}{2}-y+C\right)\left(x-\frac{y^2}{2}+C\right)=0$; особых решений нет. 83. Не является. 84. Не является. 85. Является. 86. Не

является. 87. $y = Cx + C^2$; особое решение: $y = -\frac{x^2}{4}$. 88. $y = Cx +$ $+ \frac{2}{C^2}$; особое решение: $y = \frac{3\sqrt[3]{4}}{2}\sqrt[3]{x^2}$. 89. $y = Cx - a\sqrt{1+C^2}$; особое решение: $y = \frac{x^2 - a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}$. 90. $y = Cx + C\ln C$; особое решение: $y = -e^{-(x+1)}$. 91. $y = Cx + \sqrt{2C}$; особое решение: $y = \frac{1}{2x} + \frac{1}{|x|}$. 92. $y = Cx - \frac{1}{4}C^4$; особое решение: $y = x\sqrt[3]{x}$. 93. $(y - x - 2a)^2 =$ $= 8ax$.

Глава III

1. а) $L[\cos x] = \sin x + 2\cos x + e^x\cos x$; б) $L[2x+7] = e^x(2x+7)$. 2. а) $L[3\sin 2x] = -12\sin 2x - 6\cos^2 2x + 3\sin^2 2x$; б) $L[7] = 7\sin 2x$. 3. а) Не является; б) является; в) является. 4. $y_1 \in S_L$; $y_2 \notin S_L$; $y_3 \notin S_L$; $y_4 \notin S_L$; $y_5 \in S_L$. 5. а) $a = (2;\ -1;\ 3)$; б) $a = (21;\ -11;\ 8)$. 6. Указание. См. пример на с. 115. 10. а) $y = \cos 5x$; б) $y = \cos 5x +$ $+ 3\sin 5x$. 11. $y = \frac{2x}{\pi} + \cos x + \frac{2}{\pi}\sin x$. 12. $W = -2xe^{-x}((x^2 -$ $- 1)\sin x + (3x+1)\cos x)$. 13. $W = 2\cos 2x$.

14. $W = e^{(k_1+k_2+\dots+k_n)x}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \dots & k_n^{n-1} \end{vmatrix} =$

$= e^{(k_1+k_2+\dots+k_n)x}\prod\limits_{1\le i<j\le n}(k_i - k_j)$. 18. $xy''' - y'' + xy' - y = 0$. 19. $y''' -$ $- y'' = 0$. 20. $y''' - \frac{3}{x}y'' + \frac{6}{x^2}y' - \frac{6}{x^3}y = 0$. 21. $y'' - 2\operatorname{ctg} 2x \cdot y' = 0$. 22. $y'' - 2y' + y = 0$. 23. $y''' - 3y'' + 4y' - 2y = 0$. 24. $y = C_1\cos x +$ $+ C_2\sin x$. 25. $y = \frac{1}{x}(C_1\sin x + C_2\cos x)$. 26. $y = C_1e^x + C_2e^{-x}$. 27 $y = C_2 + (C_1 - C_2x)\operatorname{ctg} x$. 28. $y = C_1\cos x + C_2\sin x + 5$. 29. $y =$ $= C_1 + C_2x^2 + \frac{x^3}{3}$. 30. $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \sin x\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) -$ $- 2$. 31. $y = C_1 + C_2x + \frac{1}{2}e^{1-x}$. 32. $y = C_1e^x + C_2e^{3x}$. 33. $y = C_1e^{3x} +$ $+ C_2e^{4x}$. 34. $y = e^x(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$. 35. $y = C_1 + C_2e^{3x}$. 36. $y =$ $= e^{-2x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$. 37. $y = C_1\cos 4x + C_2\sin 4x$. 38. $y =$ $= e^{3x}(C_1 + C_2x)$. 39. $y = e^{-3x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$. 40. $y = \frac{1}{2}e^{2x}$. 41. $y = 4\cos 2x - \sin 2x$. 42. $y = 2xe^{3x}$. 43. $y = 5e^x + 2e^{-x}$. 44. $y =$ $= 3(e^{2x} - 1)$. 45. $y = e^{2x} - 4e^{-x}$. 46. $q < 0$. 47. $p > 0$, $q > 0$. 48. $p =$ $= 0$, $q > 0$. 49. $\varphi(x) = x(b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3)$. 50. $\varphi(x) =$ $= x(b_0\cos 3x + d_0\sin 3x)$. 51. $\varphi(x) = b_0e^{-8x}$. 52. $\varphi(x) = xe^{\frac{2}{3}x}(b_0x +$ $+ b_1)$. 53. $\varphi(x) = x(b_0x + b_1)e^{2x}$. 54. $\varphi(x) = b_0x^2e^{4x}$. 55. $y =$

$= C_1 e^{(-2+\sqrt{3})x} + C_2 e^{(-2-\sqrt{3})x} + 4$. **56.** $y = e^{-3x}(C_1 + C_2 x) + 6x^2 e^{-3x}$. **57.** $y = e^{3x}(C_1 + C_2 x) + \frac{1}{27}(3x^2 + 4x + 2)$. **58.** $y = C_1 + C_2 e^{-4x} - \frac{1}{4} e^{-4x}(2x^2 + x)$. **59.** $y = C_1 e^{(-3+2\sqrt{3})x} + C_2 e^{(-3-2\sqrt{3})x} - \frac{4}{13}\cos 3x + \frac{16}{13}\sin 3x$. **60.** $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 2x + 1 + \frac{1}{24} e^{5x}$. **61.** $y = e^x(e^x - x^2 - x + 1)$. **62.** $y = -\frac{3}{16} e^{2x} + \frac{5}{24} e^{3x} + \left(\frac{1}{4} x - \frac{1}{48}\right) e^{-x}$. **63.** $y = \frac{5}{2} e^{x-1} - \frac{1}{2} e^{1-x} - 3x$. **64.** $y = \gamma_1 \cos x + \gamma_2 \sin x + \sin x \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$. **66.** $\gamma_1 \cos 2x + \gamma_2 \sin 2x + \frac{1}{2}\sin 2x \ln|\operatorname{tg} x|$. **67.** Уравнение движения: $\frac{d^2 s}{dt^2} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$; $s = \frac{gt^2}{2}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$. **68.** $y = \frac{x^3}{6p}$. **69.** $y = \frac{q}{2}\left(e^{\frac{x}{\sqrt{H}}} + e^{-\frac{x}{\sqrt{H}}}\right)$. **70.** Уравнение движения: $6\frac{d^2 y}{dt^2} = gy$; $t = \sqrt{\frac{6}{g}}\ln(6 + \sqrt{35})$. **71.** $I = \frac{1}{2}\left(\left(\left(I_0 - \sqrt{\frac{\rho}{R}} E_0\right) e^{l\sqrt{\rho R}}\right) + l\sqrt{\rho R}\right) + \left(I_0 + \sqrt{\frac{\rho}{R}} E_0\right)$. **72.** $s = 5\sin 2t$. **73.** $s = 8\sin\left(2t + \frac{\pi}{2}\right)$. **74.** $s = \sqrt{29}\left(\sin 2t + \operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$. **75.** $s = 5e^{-t}\sin\left(2t + \frac{\pi}{2}\right)$ — затухающее колебание. **76.** $s = \sin t - \frac{1}{2}\sin 2t$. **77.** а) $x(t) = C_1\cos 2t + C_2\sin 2t + 3\sin\sqrt{2}t = A\sin(2t + \alpha) + 3\sin\sqrt{2}t$, где $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, $\sin\alpha = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}$, $\cos\alpha = \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Наум Яковлевич Виленкин
Мирра Александровна Доброхотова
Алексей Николаевич Сафонов

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Зав. редакцией Р. А. Хабиб
Редактор Л. В. Туркестанская
Художественный редактор Е. Н. Карасик
Технический редактор В. В. Новоселова
Корректоры Л. С. Вайтман, К. А. Иванова

Н/К

Сдано в набор 15.12.83. Подписано к печати 29.10.84. Формат $84\times108^{1}/_{32}$. Бум. типограф. № 3. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 9,24. Усл. кр.-отт. 9,49. Уч.-изд. л. 8,82. Тираж 27 000 экз. Заказ 7915. Цена 30 коп. Заказное.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 129846, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано с матриц саратовского ордена Трудового Красного Знамени полиграфического комбината в областной типографии управления издательств, полиграфии и книжной торговли Ивановского облисполкома, 153628, г. Иваново, ул. Типографская, 6.